Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I" -Lösungsvorschlag-

1. a) Es ist

$$A = \begin{pmatrix} t & t^2 & t^3 \\ t^3 & t & t^2 \\ t^2 & t^3 & t \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{III}-t\,\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-t^2\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} t & t^2 & t^3 \\ 0 & t-t^4 & t^2-t^5 \\ 0 & 0 & t-t^4 \end{pmatrix} =: A'.$$

Da elementare Zeilenumformungen vom Typ III die Determinante nicht ändern, gilt, unter Beachtung, daß A' eine obere Dreiecksmatrix ist,

$$\det A = \det A' = t \cdot (t-t^4) \cdot (t-t^4) = t^3 \cdot (1-t^3)^2.$$

Also ist

$$\det A = 0 \iff t = 0 \ \vee \ t = 1.$$

Demnach ist A genau für $t \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ invertierbar.

Genauso gehen wir bei B vor; es ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -t & t \\ -t & -t & t \\ t & t & t \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{III}-t\,\mathrm{I} \\ \mathrm{II}+t\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & -t & t \\ 0 & -t-t^2 & t+t^2 \\ 0 & t+t^2 & t-t^2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & -t & t \\ 0 & -t-t^2 & t+t^2 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix} =: B'.$$

Da elementare Zeilenumformungen vom Typ III die Determinante nicht ändern, gilt, unter Beachtung, daß B' eine obere Dreiecksmatrix ist,

$$\det B = \det B' = 1 \cdot (-t-t^2) \cdot 2t = -2t^2 \cdot (1+t).$$

Also ist

$$\det B = 0 \iff t = 0 \ \vee \ t = -1.$$

Demnach ist B genau für $t \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$ invertierbar.

b) <u>zu A:</u>
Wir unterscheiden drei Fälle:
<u>1. Fall:</u> $t \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.
Dann ist nach a) die Matrix A invertierbar und es gilt also $\mathrm{Rang}(A) = 3$.

<u>2. Fall:</u> $t = 0$.
Dann ist A' die Nullmatrix, also ist $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A') = 0$.

<u>3. Fall:</u> $t = 1$.
Dann ist

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A') = 1$.

<u>zu B:</u>

Wir unterscheiden drei Fälle:
1. Fall: $t \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1\}$.
Dann ist nach a) die Matrix B invertierbar und es gilt also $\text{Rang}(B) = 3$.

2. Fall: $t = 0$.

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist $\text{Rang}(B) = \text{Rang}(B') = 1$.

3. Fall: $t = -1$.
Dann ist

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

also ist $\text{Rang}(B) = \text{Rang}(B') = 2$.

2. Es seien $s_1, \ldots, s_n$ die Spalten der gegebenen Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$; damit ist

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid M \cdot x = 0\} \subset \mathbb{R}^n \ \ UVR$$

sowie

$$S = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle = \{M \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^n \ \ UVR.$$

a) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$M \cdot (v - Mv) = Mv - M(Mv) = Mv - M^2 v \overset{M=M^2}{=} Mv - Mv = 0,$$

also ist $v - Mv \in U$.

b) Für $U \oplus S = \mathbb{R}^n$ ist zu zeigen:

i) $U + S = \mathbb{R}^n$ **und**
ii) $U \cap S = \{0\}$

zu i):
"$\subset$": $\surd$, da $U, S \subset \mathbb{R}^n$ UVR
"$\supset$": Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist nach a)

$$v = \underbrace{v - Mv}_{\in U} + \underbrace{Mv}_{\in S} \in U + S. \quad \surd$$

zu ii):
"$\supset$": $\surd$
"$\subset$": Sei $v \in U \cap S$. Dann ist also $v \in U \ \wedge \ v \in S$.
Da $v \in U$, ist $Mv = 0$; und da $v \in S$, ist $v = Mx$ mit einem $x \in \mathbb{R}^n$. Es folgt

$$v = Mx \overset{M=M^2}{=} M^2 \cdot x = M \cdot (\underbrace{M \cdot x}_{=v}) = M \cdot v = 0. \quad \surd$$

[Alternativ kann man in ii) auch mit der Dimensionsformel für UVR argumentieren:

Es ist

$$\begin{aligned}\dim U &= n - \operatorname{Rang}(M)\\ \dim S &= \operatorname{Rang}(M)\\ \dim(U+S) &\overset{i)}{=} \dim \mathbb{R}^n = n.\end{aligned}$$

Also ist nach der Dimensionsformel (5.19)

$$\dim(U\cap S) = \dim U + \dim S - \dim(U+S) = n - \operatorname{Rang}(M) + \operatorname{Rang}(M) - n = 0.$$

Also ist $U \cap S = \{0\}$.]

3. a) Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ läßt sich $f(x)$ schreiben als

$$f(x) = A\cdot x \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5\\ -4 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

also ist f nach 7.3 c) linear.

b) Es ist für $x = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$f(x) = |1+1| = 2 \qquad \text{und} \qquad f(-x) = |(-1)+(-1)| = |-2| = 2.$$

Damit ist für dieses x

$$f(-x) = 2 \neq -2 = -f(x),$$

also ist f **nicht** linear (denn f ist nicht homogen).

[Oder auch so: Für $x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und für $y = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$f(x+y) = f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = |0+0| = 0,$$

und

$$f(x)+f(y) = |1+0| + |-1+0| = 2.$$

Damit ist für diese $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$f(x+y) = 0 \neq 2 = f(x)+f(y),$$

also ist f **nicht** linear (denn f ist nicht additiv).]

c) f ist linear, denn:

- Für $p_1, p_2 \in \operatorname{Pol}(\mathbb{R})$ ist

$$f(p_1+p_2) = 3(p_1+p_2)(1) = 3(p_1(1)+p_2(1)) = 3p_1(1)+3p_2(1) = f(p_1)+f(p_2). \quad \checkmark$$

- Für $p \in \operatorname{Pol}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$f(\lambda\cdot p) = 3(\lambda\cdot p)(1) = 3\lambda\cdot p(1) = \lambda\cdot 3p(1) = \lambda\cdot f(p). \quad \checkmark$$

Also ist f additiv und homogen, also linear.

d) f ist linear, denn:

- Für $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ ist

$$f(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2)^\top = A_1^\top + A_2^\top = f(A_1) + f(A_2). \quad \checkmark$$

- Für $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$f(\lambda \cdot A) = (\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top = \lambda \cdot f(A). \quad \checkmark$$

Also ist f additiv und homogen, also linear.