MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 2
2.11.2018

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. *(Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 1)*

   a) Man löse das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

   b) Ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ lösbar für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^4$?

2. *(Herbst 2007, Thema 3, Aufgabe 1)*
   Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & t & 7 \\ 3 & t+2 & t+4 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   mit dem reellen Parameter t. Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem

   eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar, bzw. nicht lösbar

   ist und bestimmen Sie im Falle der Lösbarkeit die Lösungsmenge.

3. Berechnen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

   alle Produkte aus je zwei Faktoren, sofern diese definiert sind.

4. Wir betrachten für $n \geq 2$ die Matrizen

$$L_n := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

a) Berechnen Sie die Produkte $Q \cdot L_4$ und $Q \cdot U_4$ für

$$Q := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Was kann man beobachten?

b) Formulieren Sie eine Vermutung über das Aussehen von $A \cdot L_n$ bzw. $A \cdot U_n$, wenn $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine beliebige Matrix ist.

c) Beweisen Sie die Vermutung aus b) durch Berechnen von $A \cdot L_n$ und $A \cdot U_n$ für

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Abgabe bis 9.11.2018, 16:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).