MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 10
11.12.2018

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. Im reellen Vektorraum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ seien die Vektoren

$$p_1 = 1 + X^3, \quad p_2 = -1 - X + X^2 + 2X^3, \quad p_3 = 2 + X + 2X^2,$$

sowie

$$q_1 = 1 + 2X + 2X^2, \qquad q_2 = -1 - 3X - 2X^2 - X^3$$

gegeben. Seien $U := \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ und $W := \langle q_1, q_2 \rangle \subset \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.
Ermitteln Sie einen Vektor $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$, so daß gilt

$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot p.$$

2. Nach 5.9b) der Vorlesung bilden für $n \in \mathbb{N}_0$ die Polynome $1, x, x^2, x^3, ..., x^n$ eine Basis von $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$. Entscheiden Sie (mit Begründung), ob folgende Aussagen richtig sind:

   a) Die Polynome $1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3 + x^4, ..., x^{n-1} + x^n$ bilden ebenfalls eine Basis von $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$.

   b) Die Polynome $1,\ x + 1,\ x^2 + x + 1,\ x^3 + x^2 + x + 1$ bilden eine Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.

3. In $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben.

   a) Zeigen Sie, daß v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind, und entscheiden Sie, ob *jeder* dieser drei Vektoren eine Linearkombination der beiden anderen ist.

   b) Bestimmen Sie eine Basis von $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

4. Im $\mathbb{R}^3$ sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

   a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

   b) Für (z.B.) $t = 2$ *sind* v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, und damit (warum?) eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Koordinaten sowie die Komponenten der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 bezüglich dieser Basis v_1, v_2, v_3.

   c) Bestimmen Sie für $t = -1$ alle Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination der v_1, v_2, v_3.

Abgabe bis 18.1.2019, 16:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).