MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 4
12.11.2018

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Der „Trick“ bei dieser Aufgabe besteht darin, daß man die gegebene Gleichung in der Form $E_n = \ldots$ schreibt und dann auf der rechten Seite A ausklammert.
   Es ist also unter Verwendung der Rechenregeln aus 2.12

   $$E_n = 2A^3 + 5A^2 + 2A \;=\; 2A^3 + 5A^2 + 2E_nA \;=\; (2A^2 + 5A + 2E_n) \cdot A,$$

   und auch

   $$E_n = 2A^3 + 5A^2 + 2A \;=\; A \cdot 2A^2 + A \cdot 5A + A \cdot 2E_n \;=\; A \cdot (2A^2 + 5A + 2E_n).$$

   Damit gilt mit $B := 2A^2 + 5A + 2E_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, daß

   $$A \cdot B = E_n = B \cdot A,$$

   also ist A invertierbar mit $A^{-1} = 2A^2 + 5A + 2E_n$.
   (In der Tat hätte nach 2.26 eine der beiden Zeilen , z.B. $E_n = B \cdot A$ schon zum Nachweis der Invertierbarkeit von A genügt.)

2. Eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\det A = a\,d - b\,c \neq 0$ ist; in diesem Fall gilt dann $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

   a)
   - Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ist $\det A = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1 \neq 0$; damit ist A invertierbar, und es gilt $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
   - Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ist $\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$; damit ist A nicht invertierbar.
   - Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist $\det A = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1 \neq 0$; damit ist A invertierbar, und es gilt $A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
   - Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ist $\det A = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -2 \neq 0$; damit ist A invertierbar, und es gilt $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b)

- Für $A = \begin{pmatrix} s & t \\ -t & s \end{pmatrix}$ ist $\det A = s \cdot s - t \cdot (-t) = s^2 + t^2$; damit ist A genau dann invertierbar, wenn $s^2 + t^2 \neq 0$, also wenn $s \neq 0$ oder $t \neq 0$ gilt. In diesem Falle gilt dann $A^{-1} = \frac{1}{s^2+t^2} \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix}$.
- Für $A = \begin{pmatrix} s & t \\ t & s \end{pmatrix}$ ist $\det A = s^2 - t^2$; damit ist A genau dann invertierbar, wenn $s^2 - t^2 \neq 0$, also wenn $s \neq t$ und $s \neq -t$ gilt. In diesem Falle gilt dann $A^{-1} = \frac{1}{s^2-t^2} \begin{pmatrix} s & -t \\ -t & s \end{pmatrix}$.
- Für $A = \begin{pmatrix} s & t \\ -s & t \end{pmatrix}$ ist $\det A = st + st = 2st$; damit ist A genau dann invertierbar, wenn $s \neq 0$ und $t \neq 0$ gilt. In diesem Falle gilt dann $A^{-1} = \frac{1}{2\,s\,t} \begin{pmatrix} t & -t \\ s & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\,s} & -\frac{1}{2\,s} \\ \frac{1}{2\,t} & \frac{1}{2\,t} \end{pmatrix}$.
- Für $A = \begin{pmatrix} s & t \\ s & t \end{pmatrix}$ ist $\det A = s \cdot t - t \cdot s = 0$; damit ist A für keine Wahl von s und t invertierbar.

3. a) Wir formen A durch EZUs auf ZSF um, sehen an dieser gemäß 2.22, ob A invertierbar ist. Im Falle der Invertierbarkeit stellen wir dann durch weitere EZUs die reduzierte ZFS, also die Einheitsmatrix, her. Führen wir dieselben EZUs an E_3 durch, so erhalten wir A^{-1}:

$$(A \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}-3\,\mathrm{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}+3\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

ZSF ohne Nullzeile, also ist A invertierbar!

$$\overset{-\frac{1}{3}\cdot\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) = (E_3 \mid A^{-1})$$

Damit ist A also invertierbar mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Jede elemantare Zeilenumformung entspricht der Multiplikation mit einer Elementarmatrix <u>von links</u>, mit unseren durchgeführten EZUs ist also

$$E_3 = F_6 \cdot F_5 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot F_2 \cdot F_1 \cdot A,$$

wobei

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Addition des (-1)-fachen der 1. Zeile zur 2. Zeile:} \quad \overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\curvearrowright}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Addition des (-3)-fachen der 1. Zeile zur 3. Zeile:} \quad \overset{\mathrm{III}-3\,\mathrm{I}}{\curvearrowright}$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Addition des 3-fachen der 2. Zeile zur 3. Zeile:} \quad \overset{\mathrm{III}+3\,\mathrm{II}}{\curvearrowright}$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{Multiplikation der 3. Zeile mit } -\frac{1}{3}\text{:} \quad \overset{-\frac{1}{3}\,\mathrm{III}}{\curvearrowright}$$

$$F_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Addition des (-1)-fachen der 3. Zeile zur 1. Zeile:} \quad \overset{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{\curvearrowright}$$

$$F_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Addition des (-1)-fachen der 2. Zeile zur 1. Zeile:} \quad \overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\curvearrowright}$$

Aus $E_3 = F_6 \cdot F_5 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot F_2 \cdot F_1 \cdot A$ folgt, daß

$$A = F_1^{-1} \cdot F_2^{-1} \cdot F_3^{-1} \cdot F_4^{-1} \cdot F_5^{-1} \cdot F_6^{-1}.$$

Das Inverse eine Elementarmatrix ist wieder eine Elementarmatrix (sogar vom selben Typ); damit haben wir (unter Beachtung von 2.21) folgende Darstellung von A als Produkt von Elementarmatrixen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Beachten Sie, daß die Darstellung von A als Produkt von Elementarmatrixen nicht eindeutig ist! Je nachdem, mit welchen (und wievielen!) EZUs Sie von A zu E_3 gelangt sind, bekommen Sie auf diesem Wege unterschiedliche Produktdarstellungen von A.)

b) Da hier nicht nach einer inversen Matrix gefragt ist, erübrigt sich das parallele Umformen von E_4. Wir formen A auf Zeilenstufenform um:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{IV}-2\,\mathrm{II} \\ \mathrm{III}-\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{IV}-\mathrm{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$

Die Zeilenstufenform A' von A hat eine Nullzeile, also ist nach 2.22 A nicht invertierbar.

4. Die Vorgehensweise ist die gleiche wie in Aufgabe 3a). Man läßt sich durch das Auftreten eines Parameters nicht irritieren, und schleppt ihn bei den EZUs einfach mit. An geeigneter Stelle führt man dann eine Fallunterscheidung hinsichtlich des Aussehens des ZSF von A durch:
Es ist

$$(A_t \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & t & 0 & 1 & 0 \\ t & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 1-t & -t & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III} \leftrightarrow \mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 1-t & -t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t-1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) =: (A'_t \mid B'_t)$$

[Die ZSF hängt von t ab, also hier noch keine Treppe einzeichnen!]
Dies motiviert folgende Fallunterscheidung:

1. Fall: $t \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$. Dann ist $1-t \neq 0$ und $t-1 \neq 0$.
Wir haben also eine ZFS von A_t ohne Nullzeile, also ist gemäß 2.22 A_t invertierbar. Es ist dann weiter

$$(A'_t \mid B'_t) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 1-t & -t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t-1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\frac{1}{1-t}\cdot\mathrm{II} \\ \frac{1}{t-1}\cdot\mathrm{III}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{t}{1-t} & 0 & \frac{1}{1-t} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-t} & -\frac{1}{1-t} & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\mathrm{I}-\mathrm{III} \\ \mathrm{II}-\mathrm{III}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1-\frac{1}{1-t} & \frac{1}{1-t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{t}{1-t}-\frac{1}{1-t} & \frac{1}{1-t} & \frac{1}{1-t} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-t} & -\frac{1}{1-t} & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1+\frac{t}{1-t} & 0 & -\frac{1}{1-t} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-t-1}{1-t} & \frac{1}{1-t} & \frac{1}{1-t} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-t} & -\frac{1}{1-t} & 0 \end{array}\right) = (E_3 \mid A_t^{-1}).$$

Damit ist

$$A_t^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t} & 0 & -\frac{1}{1-t} \\ \frac{-t-1}{1-t} & \frac{1}{1-t} & \frac{1}{1-t} \\ \frac{1}{1-t} & -\frac{1}{1-t} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -t-1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Fall: $t = 1$. Dann ist $1-t = 0$ und $t-1 = 0$.
Also ist

$$(A'_1 \mid B'_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

ZSF mit Nullzeile(n), also ist A_1 nicht invertierbar.