MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 14
4.2.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ läßt sich $f(x)$ schreiben als

$$f(x) = A \cdot x \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist f nach 7.3 c) linear.

b) Es gilt $f(0) = 1 \neq 0$, ,also ist f nach 7.2 a) **nicht** linear.

c) Es ist für $p_1(x), p_2(x) \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$

$$f(p_1(x) + p_2(x)) = x \cdot (p_1(x) + p_2(x)) = x \cdot p_1(x) + x \cdot p_2(x) = f(p_1(x)) + f(p_2(x));$$

und für $p(x) \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda \cdot p(x)) = x \cdot (\lambda \cdot p(x)) = \lambda \cdot (x \cdot p(x)) = \lambda \cdot f(p(x)).$$

Also ist f linear.

d) Es ist z.B. für $A = E_2,\ \lambda = 2$

$$f(\lambda \cdot A) = f(2 \cdot E_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4, \quad \text{wohingegen}$$
$$\lambda \cdot f(A) = 2 \cdot f(A) = 2 \cdot \det E_2 = 2 \cdot 1 = 2$$

Also ist $f(\lambda \cdot A) \neq \lambda \cdot f(A)$, also ist f **nicht** linear.
(Oder man zeigt z.B. mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, daß $f(A+B) \neq f(A) + f(B)$.)

2. Gegeben ist die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4,\ f(x) = A \cdot x, \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ -6 & -6 & -3 & -4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}.$$

Da $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ ist $\mathrm{Rang}\, A \leq 4 < 5$. Damit kann nach 7.4 eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ unmöglich injektiv sein.
Wegen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ -6 & -6 & -3 & -4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{IV}-2\,\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} \\ \mathrm{II}+3\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{IV}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{IV}-2\,\mathrm{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: A'$$

ist $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A') = 3 < 4$, und damit ist f nach 7.4 auch nicht surjektiv.

3. (i) Da e_1, e_2, e_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ sind, gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung 7.10 für jeden Vektorraum W und jede Wahl von Vektoren w_1, w_2, $w_3 \in W$ eine (eindeutig bestimmte) lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to W$ mit $f(e_1) = w_1$, $f(e_2) = w_2$ und $f(e_3) = w_3$, insbesondere auch für $W = \mathbb{R}^3$ und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(ii) Sei $v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann bilden die Vektoren

$$e_1, e_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$$

wegen

$$\det(e_1\ e_2\ v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

keine Basis von $\mathbb{R}^3$; es ist $v_3 \in \langle e_1, e_2 \rangle$ mit $v_3 = e_1 + e_2$.

Annahme: Es gibt ein lineares $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit ii). Wegen $v_3 = e_1 + e_2$ muß dann aufgrund der Linearität von f gelten

$$f(v_3) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2),$$

also

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ein Widerspruch. Also kann es keine lineare Abbildung f mit ii) geben.

(iii) Wie in ii) festgestellt sind e_1, e_2, v_3 keine Basis von $\mathbb{R}^3$; es gilt $v_3 = e_1 + e_2$.
Weil auch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, gibt es unendlich viele lineare Abbildungen f mit iii).

Denn: e_1, e_2 sind offensichtlich linear unabhängig. Ergänze nun e_1, e_2 mit einem Vektor $v_3' \in \mathbb{R}^3$ (z.B. mit $v_3' = e_3$) zu einer Basis

$$e_1, e_2, v_3' \quad \text{von } \mathbb{R}^3.$$

Wähle nun $w_3' \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Dann gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung 7.10 (genau) eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f(v_3') = w_3'.$$

Jedes solche f erfüllt aufgrund der Linearität auch

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = f(e_2+e_2) = f(e_1)+f(e_2) = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Da $w_3' \in \mathbb{R}^3$ beliebig gewählt war, gibt es also unendlich viele lineare f mit iii).

4. Für die gegebenen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

betrachten wir die Matrix $B = (v_1\ v_2\ v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wegen

$$\det B = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

bilden v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Also gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung 7.10 genau eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad f(v_2) = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad f(v_3) = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}.$$

Nach 7.5 ist f von der Form $f = l_A$, also $f(x) = A\cdot x$ mit einer Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Es ist also

$$f(v_1) = A\cdot v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad f(v_2) = A\cdot v_2 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \quad f(v_3) = A\cdot v_3 = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},$$

also

$$A\cdot(v_1\ v_2\ v_3) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Also

$$A\cdot B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\end{pmatrix}, \qquad \text{und damit} \qquad A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot B^{-1}.$$

Wegen

$$(B \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{II}-\mathrm{III}\\ \mathrm{I}-\mathrm{III}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$
$$\overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) = (E_3 \mid B^{-1})$$

ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Also ist

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$