MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 8
10.12.2018

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I"

1. a) Untersuchen Sie, bei welchen der folgenden Teilmengen es sich um Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ handelt:

   $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2 - 3x_3\}$
   $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 \cdot x_3 \text{ und } x_2 = 3\}$
   $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \cdot x_3 \leq 0\}$
   $U_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 \cdot x_3 \text{ und } x_2 = 0\}$

   b) Untersuchen Sie, bei welchen der folgenden Teilmengen es sich um Untervektorräume von $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ handelt:

   $W_1 := \{p(x) \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Grad}(p(x)) = 2\}$
   $W_2 := \{p(x) \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid p(x) = a \cdot x^3 - a \cdot x + 2a \,, a \in \mathbb{R}\}$

2. Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5} \qquad \text{sowie} \qquad x_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

   a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = 0.$$

   b) Bestimmen Sie $b \in \mathbb{R}^4$, so daß x_p eine Lösung von $A \cdot x = b$ ist, und geben Sie die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems an.

3. Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien die beiden Teilmengen

$$U = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_4 = 0 \text{ und } x_2 - x_3 - x_4 = 0\right\}$$

   und

$$W = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ und } x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0\right\}$$

   gegeben. Begründen Sie, warum U und W Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$ sind, und bestimmen Sie die Elemente des Untervektorraums $U \cap W \subset \mathbb{R}^4$.

4. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $U, W \subset V$ Untervektorräume.

   a) Zeigen Sie an einem Beipiel mit $V = \mathbb{R}^2$, daß die Vereinigung $U \cup W \subset V$ i.a. kein Untervektorraum mehr ist.

   b) Zeigen Sie die Aussage von Satz 4.11 c) der Vorlesung:

$$U \cup W \subset V \quad \text{Untervektorraum} \qquad \Longleftrightarrow \qquad U \subset W \;\vee\; W \subset U.$$

Für die Tutorien vom 10.12. bis 14.12.18