MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 6
26.11.2018

# Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

   a) Bestimmen Sie die Determinante von $A$.

   b) Zeigen Sie mit Hilfe von a), daß die Matrix $B = -\frac{1}{2}A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ die Determinante $\det B < -1$ besitzt.

   c) Untersuchen Sie, ob es eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $C^2 = B$ gibt.

2. a) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ sei die Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 1 & \text{für } i = j+1, \\ a & \text{für } i = 1 \text{ und } j = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegeben; zu betrachten ist also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

   Zeigen Sie, daß

$$\det A = 1 + (-1)^{n+1} a,$$

   etwa unter Verwendung des Laplaceschen Determinantenentwicklungssatzes.

   b) Bei einer Vorstellung des Zauberers Linalgini sitzen $n \geq 3$ Menschen im Kreis. Linalgini fordert jeden auf, sich jeweils eine beliebige geheime Zahl zu denken, und sagt dann: „Wenn ich immer die Summe der geheimen Zahlen je zweier nebeneinandersitzender Teilnehmer kenne, weiß ich alle geheimen Zahlen.“

   Beweisen Sie, daß Linalgini recht hat, sofern $n$ ungerade ist. Was passiert, wenn $n$ gerade ist?

3. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

invertierbar ist und berechnen Sie in diesen Fällen die inverse Matrix, und zwar ...

a) mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen,

b) mit Hilfe der Determinante und der komplementären Matrix.

4. Überprüfen Sie jeweils in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ die Matrizen

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ t & t & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

auf Invertierbarkeit und bestimme in diesen Fällen $\det\left(A_t^{-1}\right)$. Berechnen Sie im Fall $t = 0$ die Komplementärmatrix $\widetilde{A_0}$, und geben Sie mit deren Hilfe $A_0^{-1}$ an.

**Für die Tutorien vom 26.11. bis 30.11.18**