MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 9
19.12.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Lösungssvorschlag-

1. a) Setze $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+2x-3x}{x^2-x-1}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge (o.E. $x_n \neq 0$) mit $x_n \longrightarrow -\infty$; dann gilt $\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und damit

$$f(x_n) = \frac{1+2x_n-3x_n^2}{x_n^2-x_n-1} = \frac{x_n^2\left(\frac{1}{x_n^2}+\frac{2}{x_n}-3\right)}{x_n^2\left(1-\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n^2}\right)} = \frac{\frac{1}{x_n^2}+\frac{2}{x_n}-3}{1-\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0+0-3}{1-0-0} = -3,$$

also $\lim\limits_{n\to-\infty} f(x_n) = -3$ und damit, da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to -\infty$ beliebig war, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$.

[Ohne Folgen explizit zu erwähnen, schreiben wir das dann auch kurz so:
Für $x \neq 0$ ist

$$f(x) = \frac{1+2x-3x^2}{x^2-x-1} = \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0+0-3}{1-0-0} = -3,$$

also $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$.
Oder mit „ $\lim\limits_{x\to-\infty}$ “ und ohne Erwähnung von f dann so:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1+2x-3x^2}{x^2-x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{0+0-3}{1-0-0} = -3. \,]$$

b) Es ist $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)\cdot(x^2+1)$, wie man durch Polynomdivision herausfindet. Dann ist

$$\lim_{x\to1+} \frac{x^3-x^2+x-1}{(x-1)^3} = \lim_{x\to1+} \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^3} = \lim_{x\to1+} \frac{\overbrace{x^2+1}^{\to 2}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\to 0,\ (x-1)^2>0}} = \infty$$

und

$$\lim_{x\to1-} \frac{x^3-x^2+x-1}{(x-1)^3} = \lim_{x\to1-} \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^3} = \lim_{x\to1-} \frac{\overbrace{x^2+1}^{\to 2}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\to 0,\ (x-1)^2>0}} = \infty.$$

Also existiert $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+x-1}{(x-1)^3}$ im uneigentlichen Sinn, nämlich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{(x-1)^3} = \infty.$$

c) Es ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5+12x^4+2x^2-1}{(x-3)^2} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5+12x^4+2x^2-1}{x^2-6x+9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5\left(1+\frac{12}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right)}{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^3}_{\to-\infty} \cdot \underbrace{\frac{1+\frac{12}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^5}}{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}}_{\to 1} = -\infty.\end{aligned}$$

d) Sei $x \geq 0$. Dann ist $2+[x] > 0$ und $2+[2x] > 0$ und es gilt wegen $x-1 \leq [x] \leq x$

$$\frac{2+x-1}{2+2x} \leq \frac{2+[x]}{2+[2x]} \leq \frac{2+x}{2+2x-1}.$$

Nun ist

$$\frac{2+x-1}{2+2x} = \frac{1+x}{2+2x} = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{2}{x}+2} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

und

$$\frac{2+x}{2+2x-1} = \frac{2+x}{1+2x} = \frac{\frac{2}{x}+1}{\frac{1}{x}+2} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Damit gilt nach 3.5 e) (Schrankenlemma für Funktionen)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+[x]}{2+[2x]} = \frac{1}{2}.$$

2. Für alle t, $m \in \mathbb{R}$ gilt:

- Die Einschränkung $f|_{]-\infty,0[}$ von f auf das offene Intervall $]-\infty,0[$ ist als quadratische Funktion insbesondere stetig, weswegen f in allen Punkten $a \in\,]-\infty,0[$ stetig ist: bei $x \to a$ mit $x \in\,]-\infty,0[$ ist nämlich

$$f(x) = -mx^2+tx \xrightarrow[x\to a]{} -ma^2+ta = f(a).$$

- Die Einschränkung $f|_{]0,2[}$ von f auf das offene Intervall $]0,2[$ ist als lineare Funktion insbesondere stetig, weswegen f in allen Punkten $a \in\,]0,2[$ stetig ist: bei $x \to a$ mit $x \in\,]0,2[$ ist nämlich

$$f(x) = mx+t \xrightarrow[x\to a]{} mx+t = f(a).$$

- Die Einschränkung $f|_{]2,\infty[}$ von f auf das offene Intervall $]2,\infty[$ ist als quadratisch Funktion insbesondere stetig, weswegen f in allen Punkten $a \in\,]2,\infty[$ stetig ist: bei $x \to a$ mit $x \in\,]2,\infty[$ ist nämlich

$$f(x) = mx^2+2mx-12 \xrightarrow[x\to a]{} ma^2+2ma-12 = f(a).$$

Es bleiben die Punkte $a = 0$ und $a = 2$ zu betrachten. Wegen

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (mx + t) = t$$

und

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \left(-mx^2 + tx\right) = 0 = f(0)$$

ist f im Punkt $a = 0$ genau dann stetig, wenn

$$t = 0$$

gilt. Wegen

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \left(mx^2 + 2mx - 12\right) = 8m - 12 = f(2)$$

und

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (mx + t) = 2m + t$$

ist f im Punkt $a = 2$ genau dann stetig, wenn

$$8m - 12 = 2m + t$$

gilt. Die Funktion f ist also genau dann stetig, wenn

$$t = 0 \qquad \text{und} \qquad 8m - 12 = 2m + t$$

gilt. Mit $t = 0$ ergibt sich aus der zweiten Gleichung $m = 2$.

Die also genau im Falle $(t, m) = (0, 2)$ stetige Funktion lautet

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -2x^2, & \text{für } x \leq 0, \\ 2x, & \text{für } 0 < x < 2, \\ 2x^2 + 4x - 12\,, & \text{für } 2 \leq x. \end{cases}$$

3. a) Die Funktionen g_n sind als Quotient zweier stetiger Funktionen wieder stetig. Es gilt nämlich für festen $n \in \mathbb{N}$ (alle folgenden Funktionen sind auf $\mathbb{R}$ definiert):
Die Funktion $x \longmapsto nx$ ist stetig, also ist auch $x \longmapsto |nx|$ und damit auch $x \longmapsto 1+|nx|$ stetig. Dann ist auch $x \longmapsto \frac{nx}{1+|nx|} = g_n(x)$ stetig.

- Für $x = 0$ ist $g_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(0) = 0$
- Sei $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1 + |nx|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n} + |x|} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1\,, & \text{für } x > 0 \\ -1\,, & \text{für } x < 0 \end{cases} .$$

b) Die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{für } x > 0 \\ 0\,, & \text{für } x = 0 \\ -1\,, & \text{für } x < 0 \end{cases} ,$$

ist stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. An der Stelle $x = 0$ ist g nicht stetig, da

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = -1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0+} g(x) = 1,$$

also existiert $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ **nicht** (der rechtsseitige und linksseitige Grenzwert von g an der Stelle 0 stimmen nicht überein).
Eine alternative Begründung ist auch

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = 1 \neq 0 = g(0).$$

4. Wir nehmen an, daß die Behauptung falsch ist. Dann gilt also

$$\forall\, ¿0 \;\; \exists\, x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \;\; |x-a| < . \;\; \text{und} \quad f(x) \leq \frac{f(a)}{2}.$$

Insbesondere gilt dann (bei Wahl von $=\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$)

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, x_n \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \;\; |x_n-a| < . \;\; \text{und} \quad f(x_n) \leq \frac{f(a)}{2}.$$

Wegen

$$0 \leq |x_n - a| < \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt nach dem Schrankenlemma auch $|x_n - a| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, also $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Weil f stetig in a ist, gilt dann

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$$

und wegen $f(x_n) \leq \frac{f(a)}{2}$ für alle $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ist damit auch $f(a) \leq \frac{f(a)}{2}$, woraus $f(a) \leq 0$ folgt, ein Widerspruch zur Voraussetzung $f(a) > 0$. Damit ist die Behauptung bewiesen.