MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 7
5.12.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Lösungssvorschlag-

1. • Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\frac{3\,n^3}{2\,n^4-1} \geq \frac{3\,n^3}{2\,n^4} = \frac{3}{2\,n} \geq 0.$$
Mit der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2\,n}$ divergent. Nach dem Minorantenkriterium ist dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\,n^3}{2\,n^4-1}$ divergent. [Man sagt auch: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2\,n}$ ist eine divergente Minorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\,n^3}{2\,n^4-1}$.]

   • Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2}.$$
Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert (siehe z.B. 2.20 b)), ist nach dem Majorantenkriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$ konvergent. [Man sagt auch: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$.]

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{n}{(n+1)\,(n+2)}$.

   • Da für $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)}{(n+2)\,(n+3)} - \frac{n}{(n+1)\,(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2 - n\,(n+3)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} = \frac{(n^2+2\,n+1) - (n^2+3\,n)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} \\ &= \frac{1-n}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} \leq 0 \end{aligned}$$
ist also $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

   • Wegen
$$a_n = \frac{n}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{n}{n^2+3n+2} = \frac{n}{n^2 \cdot (1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \cdot \frac{1}{1} = 0$$
ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Folglich ist nach dem Leibnizkriterium die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, \frac{n}{(n+1)\,(n+2)}$$

konvergent. Des weiteren gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|(-1)^n\, a_n| = a_n = \frac{n}{(n+1)\,(n+2)} \geq \frac{n}{(n+n)\,(n+2\,n)} = \frac{n}{2\,n\cdot 3\,n} = \frac{1}{6\,n} \geq 0.$$

Mit der harmonischen Reihe ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6\,n}$ divergent. Nach dem Minorantenkriterium ist dann die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\, a_n|$ divergent.
Damit ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, \frac{n}{(n+1)\,(n+2)}$$

nicht absolut konvergent.

3. a) Wir zeigen durch vollständige Induktion: $a_n \in [3,4]\ \forall n \in \mathbb{N}$:

   <u>Induktionsanfang:</u> $n = 1$ klar!
   <u>Induktionsschluß:</u> „$n \to n{+}1$“: Sei $n \geq 0$ und gelte $a_n \in [3,4]$; z.z. ist $a_{n+1} \in [3,4]$.

   $$3 = \sqrt{9} = \sqrt{3+6} \leq \sqrt{a_n+6} \leq \sqrt{4+6} = \sqrt{10} \leq \sqrt{16} = 4,$$

   und damit $a_{n+1} \in [3,4]$.

   Insbesondere ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ somit beschränkt.

   b) Wir zeigen zuerst, daß die Folge monoton fallend ist, d.h. $a_n \geq a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   Auch diese Aussage kann man leicht mit vollständiger Induktion beweisen; es geht aber auch direkt:
   Da $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, genügt es, zu zeigen, daß $a_n^2 \geq a_{n+1}^2\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt. Es ist

   $$a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - a_n - 6 = (\underbrace{a_n - 3}_{\geq 0}) \cdot (\underbrace{a_n + 2}_{\geq 0}) \geq 0,$$

   da, wie in a) gezeigt, $a_n \geq 3$. Also gilt $a_n \geq a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   Die Folge ist also monoton und (siehe a)) beschränkt und damit konvergent. Für den Grenzwert a gilt $a \in [3,4]$; ferner $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ und somit, unter Vewendung von der Rechenregeln 1.23 für konvergente Folgen sowie (1.27)

   $$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n+6}\right) = \sqrt{a+6},$$

   also

   $$a = \sqrt{a+6} \implies a^2 - a - 6 = 0 \implies a = 3 \ \text{ oder } \ a = -2.$$

   Wegen $a \in [3,4]$, kommt nur $a = 3$ in Frage, es gilt also $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$.

c) Wir untersuchen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^n}{\sqrt{n}} x^n$ zunächst mit Hilfe des Wurzelkriteriums:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{a_n^n \cdot x^n}{\sqrt{n}}\right|} \overset{a_n \geq 0}{=} a_n \cdot |x| \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = a_n \cdot |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3 \cdot |x|,$$

denn $\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, woraus mit (1.27) $\sqrt{\sqrt[n]{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1} = 1$ folgt. Damit ist die Reihe absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $3 \cdot |x| < 1$ (d.h. für $|x| < \frac{1}{3}$) und divergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $3 \cdot |x| > 1$ (d.h. für $|x| > \frac{1}{3}$).
Es bleiben die Fälle $x = 1/3$ und $x = -1/3$ zu betrachten. Wegen $a_n \geq 3 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_n^n}{\sqrt{n}} \left(\pm\frac{1}{3}\right)^n\right| = \left(\frac{a_n}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist (nach 2.20 a)) divergent, also ist nach dem Minorantenkriterium $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n^n}{\sqrt{n}}\left(\pm\frac{1}{3}\right)^n\right|$ divergent. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^n}{\sqrt{n}} x^n$$

ist damit weder in $x = \frac{1}{3}$ noch in $x = -\frac{1}{3}$ absolut konvergent.

Insgesamt konvergiert die Reihe absolut für alle $x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$.

4. Sei $x \in \mathbb{R}$ fest und

$$a_n = \binom{2n}{n} x^n = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} x^n \neq 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Ist $x = 0$, so ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und man kann das Quotientenkriterium nicht anwenden (es ist aber trivial, daß in diesem Fall die Reihe konvergiert).
Für $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es ergibt sich

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(2\,(n+1))!}{(n+1)! \cdot (n+1)!} \cdot \frac{n! \cdot n!}{(2\,n)!}\right| |x| = \left|\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\right| |x| =$$
$$= \frac{(2n+1)\,(2n+2)}{(n+1)(n+1)} |x| = \frac{(2n+1) \cdot 2}{n+1} = \frac{4 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} |x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4\,|x|\ .$$

Nach dem Quotientenkriterium ist damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$ also ...

- für $4|x| < 1$, also für $|x| < \frac{1}{4}$ absolut konvergent
- für $4|x| > 1$, also für $|x| > \frac{1}{4}$ divergent.

Im Fall $|x| = \frac{1}{4}$ (und streng genommen auch im Fall $x = 0$) macht das Quotientenkriterium keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz.