MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 6
28.11.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Lösungssvorschlag-

1. a) Setze $x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, die n-te Partialsumme der harmonischen Reihe.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

also ist die in der Aufgabe angegebene Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 \quad : \; |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

erfüllt. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist jedoch **keine** Cauchy-Folge, da sie nicht konvergiert (die harmonische Reihe ist divergent!).

b) Wir zeigen, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.
Sei dazu $\varepsilon > 0$.
Weil $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-1}$ konvergent, gibt es nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen 2.8 ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n, m \geq n_0$, o.E. $n > m$, gilt

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} c_{k-1}\Big| \overset{c_{k-1}\geq 0}{=} \sum_{k=m+1}^{n} c_{k-1} = \sum_{k=m}^{n-1} c_k < \varepsilon.$$

Damit gilt für $n, m \in \mathbb{N}$, o.E. $n > m$

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + ... + x_{m+1} - x_m| \\ &\leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + ... + |x_{m+1} - x_m| \\ &\leq c_{n-1} + c_{n-2} + ... + c_m \; = \sum_{k=m}^{n-1} c_k \; < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent.

2. a) i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist $n^4 - 3n^2 > 0$ und $n - 1 > 0$, also $n^4 - 3n^2 + n - 1 > 0$ und auch $n^2 + 2n + 1 \geq 0$.
Für alle $n \geq 3$ gilt dann

$$0 \leq \Big|\frac{n^2+2n+1}{n^4-3n^2+n-1}\Big| = \frac{n^2+2n+1}{n^4 \underbrace{-3n^2}_{\underset{(*)}{\geq} -\frac{1}{2}n^4} + \underbrace{n-1}_{\geq 0}} \leq \frac{n^2+2n+1}{n^4 - \frac{1}{2}n^4} \leq \frac{n^2+n^2+n^2}{\frac{1}{2}n^4} = \frac{6}{n^2}.$$

<u>zu (*)</u>: Es ist für $n \geq 3$ $\quad n^2 \geq 6 \Longrightarrow n^4 \geq 6n^2 \Longrightarrow \frac{1}{2}n^4 \geq 3n^2 \Longrightarrow -\frac{1}{2}n^4 \leq -3n^2$.
Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2}$ ist konvergent, da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium 2.11 ist dann auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^4-3n^2+n-1}$ konvergent.

ALTERNATIV geht es vielleicht etwas schneller mit der Methode „Ausklammern“:
Es ist

$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\frac{n^2+2n+1}{n^4-3n^2+n-1}\right| &= \left|\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^4\left(1-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)}\right| \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \underbrace{\left|\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}\right|}_{\longrightarrow 1} \leq \frac{1}{n^2} \cdot 2 \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ ist konvergent, da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium 2.11 ist dann auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^4-3n^2+n-1}$ konvergent.

ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ ist $n^2 - 3n + 1 = n(n-3) + 1 > 0$ und $n + 4 \geq 0$.
Für alle $n \geq 3$ gilt dann

$$\frac{n+4}{n^2 \underbrace{-3n}_{\leq 0} + \underbrace{1}_{\leq n^2}} \geq \frac{n+4}{n^2+n^2} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} \geq 0.$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ ist divergent, da die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. Nach dem Minorantenkriterium 2.13 ist dann auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ divergent.

ALTERNATIV auch hier mit der Methode „Ausklammern“:
Es ist

$$\frac{n+4}{n^2-3n+1} = \frac{n\left(1+\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{1+\frac{4}{n}}{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}_{\longrightarrow 1} \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N},$$

dann weiter wie oben!

iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $2^n + 4^n > 0$ und $3^n \geq 0$.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$0 \leq \left|\frac{3^n}{2^n+4^n}\right| = \frac{3^n}{\underbrace{2^n}_{\geq 0} + 4^n} \leq \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ist konvergent, da es sich um eine geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ mit $|x| = \left|\frac{3}{4}\right| < 1$ handelt. Nach dem Majorantenkriterium 2.11 ist dann auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+4^n}$ konvergent.

b) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt (wie man sofort durch Nachrechnen überprüft)

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}. \tag{1}$$

Auf diese Partialbruchzerlegung kommt man durch den Ansatz

$$\begin{aligned}
\frac{2}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} = \frac{A(k+1)(k+2) + Bk(k+2) + Ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2(A+B+C) + k(3A+2B+C) + 2A}{k(k+1)(k+2)},
\end{aligned}$$

was genau dann für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, wenn

$$\begin{aligned}
A + B + C &= 0 \\
3A + 2B + C &= 0 \\
2A &= 2
\end{aligned}$$

Die einzige Lösung dieses linearen Gleichungssystems (in den Variablen A, B und C) ist $A = 1, B = -2$ und $C = 1$.
Mit (1) folgt für die n-te Partialsumme für $n \geq 3$

$$\begin{aligned}
s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=3}^{n} \underbrace{\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k}\right)}_{=0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{2}{2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \\
&= 1 + \frac{1}{2} - 1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^k,$$

zu betrachten. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist damit $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} q^k \qquad \text{für} \qquad q = \frac{3x}{x^2+2},$$

also die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \qquad \text{für} \qquad q = \frac{3x}{x^2+2};$$

diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist, wegen

$$|q| < 1 \iff \left|\frac{3x}{x^2+2}\right| < 1 \iff \frac{3|x|}{x^2+2} < 1 \underset{x^2+2>0}{\iff} 3|x| < x^2+2$$
$$\iff 0 < |x|^2 - 3|x| + 2 \iff 0 < (|x|-1)(|x|-2) \iff \big(|x| < 1 \text{ oder } |x| > 2\big)$$

also genau für

$$x \in D =]-\infty, -2[\,\cup\,]-1, 1[\,\cup\,]2, \infty[\,,$$

und in diesem Fall gilt gemäß der Summenformel für geometrische Reihen

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{3x}{x^2+2}} = \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}.$$

4. a) Die Aussage ist richtig!

Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, also insbesondere konvergent. Dann gilt nach 2.3, daß die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Reihenglieder eine Nullfolge, also insbesondere beschrämkt, ist. Damit existiert ein $C > 0$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_k| \le C.$$

Damit gilt

$$0 \le a_k^2 = |a_k| \cdot |a_k| \le C \cdot |a_k|. \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert (beachte: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent!), ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C|a_k|$ konvergent, und nach dem Majorantenkriterium ist dann $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ (absolut) konvergent.

Alternative Beweismöglichkeit unter Verwendung von Aufgabe 4 auf Tut-Blatt 6:
Wir nennen zur Unterscheidung zu den dortigen Bezeichnungen unsere Reihe jetzt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *statt* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *und setzten (o.E.)* $c_k \neq 0$ *voraus.*
Setzen wir nun in der Notation von Aufgabe 4 auf Tut-Blatt 6

$$a_k := c_k^2 \qquad \textit{und} \qquad b_k := c_k,$$

so gilt $\frac{a_k}{b_k} = \frac{c_k^2}{c_k} = c_k \longrightarrow 0$, *also ist die Folge* $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergent. Damit folgt nach Aufgabe 4 auf Tut-Blatt 6 aus der absoluten Konvergenz von* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *die (absolute) Konvergenz von* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$.

b) Die Aussage ist falsch!
Wähle z.B.

$$a_k = (-1)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

so ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, aber die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent (harmonische Reihe!).