MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 4
14.11.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Lösungssvorschlag-

1. a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist nach dem binomischen Formel

- $(2\,n^2+3)^3 = (2\,n^2)^3 + 3\,(2\,n^2)^2 \cdot 3 + 3\,(2\,n^2) \cdot 3^2 + 3^3 = 8\,n^6 + 36\,n^4 + 54\,n^2 + 27$
- $(3\,n^3+2)^2 = (3\,n^3)^2 + 2\,(3\,n^3) \cdot 2 + 2^2 = 9\,n^6 + 12\,n^3 + 4$

und damit

$$\begin{aligned} x_n = \frac{(2\,n^2+3)^3}{(3\,n^3+2)^2} &= \frac{8\,n^6+36\,n^4+54\,n^2+27}{9\,n^6+12\,n^3+4} \\ = \frac{n^6\left(8+\frac{36}{n^2}+\frac{54}{n^4}+\frac{27}{n^6}\right)}{n^6\left(9+\frac{12}{n^3}+\frac{4}{n^6}\right)} &= \frac{8+\frac{36}{n^2}+\frac{54}{n^4}+\frac{27}{n^6}}{9+\frac{12}{n^3}+\frac{4}{n^6}}. \end{aligned}$$

Nun gilt (mit Rechenregeln 1.23 für konvergente Folgen), daß $9+\frac{12}{n^3}+\frac{4}{n^6} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 9$ und $8+\frac{36}{n^2}+\frac{54}{n^4}+\frac{27}{n^6} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 8$, und damit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{8}{9}$.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n^2+1)(n+1)^n}{(3n+1)\,n^{n+1}} = \frac{(2n^2+1)\cdot(n+1)^n}{(3n+1)\cdot(n\cdot n^n)} = \frac{2n^2+1}{3n^2+n}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n}\right)}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \end{aligned}$$

so daß der erste Faktor wegen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$$

als Quotient konvergenter Folgen selbst konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3};$$

der zweite Faktor ist eine bekanntlich monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge mit dem Grenzwert e, so daß die gegebene Folge als Produkt konvergenter Folgen selbst konvergiert, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}}_{\to\frac{2}{3}}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\right) = \frac{2}{3}\,e.$$

2. a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$
\begin{aligned}
|h_{n+1}| &= |a_{n+1} - \sqrt{2}| = \left|\frac{1}{3}\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right) - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{a_n^2 + 4 - 3\sqrt{2}a_n}{3a_n}\right| \\
&= \left|\frac{a_n^2 - 2\sqrt{2}a_n + 2 - 2 - \sqrt{2}a_n + 4}{3a_n}\right| = \left|\frac{(a_n - \sqrt{2})^2 + 2 - \sqrt{2}a_n}{3a_n}\right| \\
&= \left|\frac{(a_n - \sqrt{2})^2 + \sqrt{2}(\sqrt{2} - a_n)}{3a_n}\right| \\
&= \left|\frac{h_n^2 - \sqrt{2}h_n}{3a_n}\right| \\
&= |h_n| \cdot \left|\frac{h_n - \sqrt{2}}{3a_n}\right| = |h_n| \cdot \left|\frac{a_n - \sqrt{2} - \sqrt{2}}{3a_n}\right| = |h_n| \cdot \frac{|a_n - 2\sqrt{2}|}{|3a_n|} \\
&\overset{a_n \in [1,2]}{=} |h_n| \cdot \frac{2\sqrt{2} - a_n}{3a_n} \overset{a_n \geq 1}{\leq} |h_n| \cdot \underbrace{\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}}_{=:q}
\end{aligned}
$$

Also ist

$$|h_{n+1}| \leq |h_n| \cdot q \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

mit $q := \frac{2\sqrt{2}-1}{3} = 0.6094\ldots \in]0, 1[$. Nach Satz 1.30 b) ist dann

$$h_n = a_n - \sqrt{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$.

b) Die folgende Tabelle zeigt die ersten 5 Folgeglieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Vergleich mit dem Grenzwert $\sqrt{2}$, jeweils als Dezimalzahlen mit 19 Nachkommastellen:

n	a_n	x_n
1	1	1
2	1.6666666666666666667	1.5000000000000000000
3	1.3555555555555555556	1.4166666666666666667
4	1.4354584092289010322	1.4142156862745098039
5	1.4073415631924777684	1.4142135623746899106
$\sqrt{2} =$	1.4142135623730950488	1.4142135623730950488

Diese Werte lassen vermuten, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sehr viel schneller gegen $\sqrt{2}$ konvergiert als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; in der Tat stimmen bereits bei x_5 die ersten 11 Nachkommastellen mit denen von $\sqrt{2}$ überein, während bei a_5 gerade mal die erste Nachkommastelle richtig ist. Der Grund liegt darin, daß bei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quadratische Konvergenz vorliegt, im Sinne, daß für $h_n = x_n - \sqrt{2}$ gilt

$$|h_{n+1}| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |h_n|^2,$$

während für $h_n = a_n - \sqrt{2}$ gemäß a) nur gilt

$$|h_{n+1}| \leq \frac{2\sqrt{2} - 1}{3} |h_n|$$

(entscheidend ist nicht die unterschiedliche Konstante, sondern daß auf der rechten Seite das $|h_n|$ nur linear und nicht quadratisch auftritt), und diese Ungleichung auch nicht zu $|h_{n+1}| \leq C \cdot |h_n|^2$ verbessert werden kann, wie man aus der Gleichung in a) sieht.

3. a) Sei $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n^2 + a^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

b) Sei $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}|a_n| = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} &= \frac{(\sqrt{n+2})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}) \\ = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Dabei sind wir beim Umformen von $\sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ wie in Beispiel 1.32 e) der Vorlesung vorgegangen, haben also geschickt erweitert, um dann im Zähler die binomische Formel anwenden zu können. Alternativ können wir auch den Trick „Ausklammern von $\sqrt{n}$“ verwenden. Dann sieht die Lösung so aus:

Sei $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $n_0 > \frac{4}{\varepsilon^2}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}|a_n| &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot \left(\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}} - 1\right) = \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{\frac{n+2}{n}} - 1\right) \\ &= \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1\right) \overset{(*)}{\leq} \sqrt{n} \cdot \left(1 + \frac{2}{n} - 1\right) \\ &= \sqrt{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n_0}} < \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Bei $(*)$ haben wir benützt, daß für $x \geq 1$ gilt $\sqrt{x} \leq x$, was sofort mittels (1.33) aus der für alle $x \geq 1$ gültigen Ungleichung $x \leq x^2$ folgt.

c) Sei $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $n_0 > \frac{a^2}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}|a_n| &= |\sqrt[3]{n^2 + a^2} - \sqrt[3]{n^2}| = \sqrt[3]{n^2} \cdot \left(\sqrt[3]{1 + \frac{a^2}{n^2}} - 1\right) \\ &\overset{(*)}{\leq} n \cdot \left(\sqrt[3]{1 + \frac{a^2}{n^2}} - 1\right) \overset{(**)}{\leq} n \cdot \left(1 + \frac{a^2}{n^2} - 1\right) \\ &= \frac{a^2}{n} \leq \frac{a^2}{n_0} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Bei $(*)$ haben wir benützt, daß für $x \geq 1$ gilt $\sqrt[3]{x^2} \leq x$, was sofort mittels (1.33) aus der für alle $x \geq 1$ gültigen Ungleichung $x^2 \leq x^3$ folgt.
Bei $(**)$ haben wir benützt, daß für $x \geq 1$ gilt $\sqrt[3]{x} \leq x$, was sofort mittels (1.33) aus der für alle $x \geq 1$ gültigen Ungleichung $x \leq x^3$ folgt.

4. Sei c Grenzwert einer konvergenten Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = c.$$

Folglich gilt gemäß 1.23

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}^2 = c^2.$$

Dabei ist $\left(a_{n_k}^2\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der als konvergent gegen a^2 vorausgesetzten Folge $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, konvergiert also ebenfalls gegen a^2, also

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}^2 = a^2.$$

Es gilt also

$$c^2 = a^2,$$

woraus sich aber sofort $c = a$ oder $c = -a$ ergibt.