MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 3
7.11.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Lösungssvorschlag-

1. (i) Es gilt für $a \in \mathbb{R}$

$$x_n = n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2\right) = n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2}{n^2}\right)\right) = n \cdot \left(-\frac{2a}{n} - \frac{a^2}{n^2}\right) =$$
$$= -2a - \frac{a^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -2a\,.$$

(ii) Es gilt

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 .$$

Von Beispiel 1.26 in der Vorlesung wissen wir, daß der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

existiert und somit folgt (mit Anwendung der Rechenregel 1.23)

$$x_n = \Bigg[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\longrightarrow e}\Bigg]^2 \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\longrightarrow 1}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} e^2 \cdot 1^2 = e^2\,.$$

(iii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$. Dann ist $q \neq 1$. Mit der geometrischen Summenformel gilt dann

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} q^i - q^0\right) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+2}}{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} - 1\right) = \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+2}}{n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right)} - \frac{1}{n}.$$

Nach (i) gilt (mit $a = 1$) für den Nenner

$$n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -2,$$

und nach (ii) für den Zähler

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2\,n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - e^2 \,.$$

Nach Anwendung von Rechenregel 1.23 erhält man somit

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2i} = \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+2}}{n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right)} - \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1 - e^2}{-2} - 0 = -\frac{1 - e^2}{2}.$$

2. a) Wir zeigen zuerst mit vollständiger Induktion das $x_n \in [1,2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
<u>Induktionsanfang:</u> $x_1 = 1 \in [1,2]$
<u>Induktionsschluß:</u> „$n \to n+1$“: Sei $n \geq 1$ und gelte $x_n \in [1,2]$; z.z. ist $x_{n+1} \in [1,2]$.

Es ist

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n + \frac{4}{x_n}\right) \;\leq\; \frac{1}{3}\left(2 + \frac{4}{1}\right) = \frac{6}{3} = 2$$

und

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n + \frac{4}{x_n}\right) \;\geq\; \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{2}\right) = \frac{3}{3} = 1,$$

also insgesamt $x_{n+1} \in [1,2]$.

Wir zeigen nun mit vollständiger Induktion das $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
<u>Induktionsanfang:</u> $x_1 = 1$ ist offensichtlich Element in $\mathbb{Q}$.
<u>Induktionsschluß:</u> „$n \to n+1$“: Sei $n \geq 1$ und gelte $x_n \in \mathbb{Q}$; z.z. ist $x_{n+1} \in \mathbb{Q}$.

Zuerst gilt wegen dem eben gezeigten $x_n \in [1,2]$, daß $x_n \neq 0$. Somit folgt, daß das Inverse $x_n^{-1} \in \mathbb{R}$ existiert. Da $x_n \in \mathbb{Q}$, ist auch $x_n^{-1} \in \mathbb{Q}$. Weil $\mathbb{Q}$ ein Körper ist und $\frac{1}{2}, 2, x_n \in \mathbb{Q}$ und

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x_n + 2 \cdot x_n^{-1}\right) \,,$$

ist $x_{n+1} \in \mathbb{Q}$.

Insgesamt ist also gezeigt, daß $x_n \in \mathbb{Q} \cap [1,2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) <u>Annahme:</u> Es gilt $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ für ein $a \in \mathbb{Q}$. Es ist also $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, und natürlich auch $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$
Wegen $x_n \in [1,2] \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, ist damit nach 1.19 auch $a \in [1,2]$, insbesondere $a \neq 0$. Mit Anwendung der Rechenregel 1.23 über konvergente Folgen erhält man dann

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(x_n + \frac{4}{x_n}\right) = \frac{1}{3}\left(a + \frac{4}{a}\right),$$

folglich

$$a = \frac{1}{3}\left(a + \frac{4}{a}\right),$$

woarus sich $3a = a + \frac{4}{a}$, also $2a^2 = 4$, also $a = \pm\sqrt{2}$ ergibt (wegen $a \in [1,2]$ muß dann $a = \sqrt{2}$ gelten). Nun ist aber, wie wir aus Grundlagen I wissen, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen eine rationale Zahl.

<u>Beachte:</u> Wir haben jetzt nur gezeigt, daß, **wenn** die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (in $\mathbb{R}$) konvergiert, der Grenzwert $\sqrt{2}$ ist (und damit keine rationale Zahl sein kann); ob diese Folge tatsächlich konvergent (gegen $\sqrt{2}$) ist, wird auf dem nächsten Übungsblatt untersucht.

3. a) In Aufgabe 1 auf Üb-Blatt 1 wurde schon gezeigt

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend
- $a_n \in [2,3]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton und beschränkt, also nach Satz 1.25 konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Wegen $a_n \in [2,3]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ muß dann nach 1.19 auch $a \in [2,3]$ gelten. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{und natürlich auch} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$$

Mit Anwendung der Rechenregel 1.23 über konvergente Folgen erhält man dann (mit $a \neq 0$)

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2+4}{2a_n} = \frac{a^2+4}{2a},$$

also

$$a = \frac{a^2+4}{2a},$$

woraus sich $2a^2 = a^2 + 4$ und damit $a = 2$ oder $a = -2$ ergibt; wegen $a \in [2,3]$ muß $a = 2$ gelten. Damit konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen 2.

b) In Aufgabe 3 auf Üb-Blatt 1 wurde schon gezeigt

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend
- $a_n \in [1,13]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton und beschränkt, also nach Satz 1.25 konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Wegen $a_n \in [1,13]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ muß dann nach 1.19 auch $a \in [1,13]$ gelten. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{und natürlich auch} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$$

Mit Anwendung der Rechenregel 1.23 über konvergente Folgen bzw. (1.27) erhält man dann

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{12+a_n} = \sqrt{12+a},$$

also

$$a = \sqrt{12+a},$$

woraus sich $a^2 = 12 + a$, also $a^2 - a - 12 = (a-4)\cdot(a+3) = 0$ und damit $a = 4$ oder $a = -3$ ergibt; wegen $a \in [1,13]$ muß $a = 4$ gelten. Damit konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen 4.

4. Im Falle der Konvergenz der durch die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) \qquad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

definierten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kommen für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ wegen

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) = \frac{1}{5}\left(a^2 + 6\right)$$

und damit

$$0 = a^2 - 5\,a + 6 = (a-2)(a-3)$$

nur die beiden Werte $a = 2$ und $a = 3$ in Frage. Dies motiviert die folgende Fallunterscheidung hinsichtlich des Startwertes $x_0 \in [0, 3]$:

<u>1. Fall:</u> $x_0 = 2$

Dann ist $x_1 = \frac{1}{5}\,(2^2 + 6) = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2$ und analog (wie man sofort durch vollständige Induktion zeigt) $x_n = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $a = 2$, also $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$.

<u>2. Fall:</u> $x_0 = 3$

Für $x_0 = 3$ ist $x_1 = \frac{1}{5}\,(3^2 + 6) = \frac{1}{5} \cdot 15 = 3$ und analog (wie man sofort durch vollständige Induktion zeigt) $x_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $a = 3$, also $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$.

<u>3. Fall:</u> $x_0 \in]2, 3[$

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist beschränkt:

Wir zeigen: $x_n \in\ ]2, 3[$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 0$: klar!

<u>Induktionsschluß:</u> „$n \to n+1$“: Sei $n \geq 0$ und gelte $x_n \in]2, 3[$; z.z. ist $x_{n+1} \in]2, 3[$.

Es ist

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) \;<\; \frac{1}{5}\left(3^2 + 6\right) = \frac{1}{5} \cdot 15 = 3 \quad \checkmark$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) \;>\; \frac{1}{5}\left(2^2 + 6\right) = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2, \quad \checkmark$$

also ist $x_{n+1} \in]2, 3[$.

ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist streng monoton fallend:

Man kann hierzu $x_{n+1} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion zeigen, oder auch direkt unter Verwendung des Resultats aus i) so:

Es ist für $n \in \mathbb{N}_0$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) - x_n = \frac{1}{5}\left(x_n^2 - 5\,x_n + 6\right) = \frac{1}{5}\underbrace{(x_n - 3)}_{<0}\underbrace{(x_n - 2)}_{>0} < 0,$$

und somit $x_{n+1} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$;

Aus i) und ii) folgt mit 1.25, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent ist gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Als Grenzwert a kommen nach obiger Überlegung nur $a = 2$ oder $a = 3$ in Frage. Wegen ii) muß $a = 2$ sein. Also gilt $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$.

<u>4. Fall:</u> $x_0 \in [0, 2[$

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist beschränkt:

Wir zeigen: $x_n \in [0,2[$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $n = 0$: klar!

Induktionsschluß: „$n \to n+1$“: Sei $n \geq 0$ und gelte $x_n \in [0,2[$; z.z. ist $x_{n+1} \in [0,2[$.

Es ist

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) < \frac{1}{5}\left(2^2 + 6\right) = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2 \quad \surd$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) \geq 0, \quad \surd$$

also ist $x_{n+1} \in [0,2[$.

ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist streng monoton wachsend:

Man kann hierzu $x_{n+1} > x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion zeigen, oder auch direkt unter Verwendung des Resultats aus i) so:

Es ist für $n \in \mathbb{N}_0$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right) - x_n = \frac{1}{5}\left(x_n^2 - 5\,x_n + 6\right) = \frac{1}{5}\underbrace{(x_n - 3)}_{<0}\underbrace{(x_n - 2)}_{<0} > 0,$$

und somit $x_{n+1} > x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$;

Aus i) und ii) folgt mit 1.25, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent ist gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Als Grenzwert a kommen nach obiger Überlegung nur $a = 2$ oder $a = 3$ in Frage. Wegen $x_n \in [0,2[$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ muß nach 1.19 dann $a \in [0,2]$ sein, also $a = 2$ gelten. Also gilt $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$.