MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Nissen-Meyer

WS 2014/15
Blatt 2
31.10.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Lösungssvorschlag-

1. a) Es ist

- $a_1 = \frac{3}{3} = 1$, $a_2 = \frac{5}{4}$, $a_3 = \frac{7}{5}$, $a_4 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ und $a_5 = \frac{11}{7}$ sowie
- $b_1 = 1 - 1 + 1 = 1$, $b_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, $b_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$, $b_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{21}{16}$ und $b_5 = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{21}{25}$.

b) Die Berechnung der ersten fünf Folgenglieder unter a) legt nahe, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{2\,n+1}{n+2} = \frac{2\,(n+2)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2}.$$

Wegen $n+2 < n+3$ ist $\frac{3}{n+2} > \frac{3}{n+3}$ und damit

$$a_n = 2 - \frac{3}{n+2} < 2 - \frac{3}{n+3} = a_{n+1}.$$

Wegen $b_1 = 1 < \frac{7}{4} = b_2$ und $b_2 = \frac{7}{4} > \frac{7}{9} = b_3$ ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder monoton fallend noch monoton wachsend.

c) Es ist

$$0 \leq a_n = \frac{2n+1}{n+2} \leq \frac{2n+2}{n+1} = 2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\leq 1} \leq 3,$$

sowie

$$b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \geq \underbrace{1 - \frac{1}{n}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Also sind sowohl die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

[*Alternativ kann man die Beschränktheit auch so begründen:*
Es gilt nach 1.23 und wegen $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ *und* $\frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$, *daß*

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2+0}{1+0} = 2,$$

also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und damit nach 1.20 insbesondere beschränkt.

Für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ argumentiert man genauso: Es ist

$$b_n = 1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1+0+0 = 1,$$

also ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und damit nach 1.20 insbesondere beschränkt.]

2. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $n_0 > \frac{3}{\varepsilon}$ (diese Wahl von n_0 erschließt sich erst durch die folgende Rechnung). Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |x_n - 3| &= \left| \frac{3n^2}{n^2+n-1} - 3 \right| = \left| \frac{3n^2 - 3(n^2+n-1)}{n^2+n-1} \right| \\ &= \left| \frac{-3n+3}{n^2+n-1} \right| = \frac{3(n-1)}{n^2 + \underbrace{n-1}_{\geq 0}} \leq \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n} \leq \frac{3}{n_0} < \varepsilon. \end{aligned}$$

3. Wir zeigen zuerst die Aussage

$$\text{Für alle } n \geq 2 \quad : \quad \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

mit vollständiger Induktion.

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 2$: Es ist

$$\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{2}\right).$$

<u>Induktionsschluß:</u> „$n \to n+1$“: Sei $n \geq 2$ und es gelte

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right).$$

Zu zeigen ist:

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n+1}\right) \qquad \text{(Induktionsbehauptung)}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) &= \left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{(n+1)(n+2)}-\frac{4}{n(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2(n+1)(n+2)-2n-4}{n(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2n^2+6n+4-2n-4}{n(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2n^2+4n}{n(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2n(n+2)}{n(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Nun gilt $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so daß aus 1.23 folgt

$$x_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}(1+0) = \frac{1}{3}.$$

4. a) Aus $x_n \longrightarrow a$ folgt mit 1.16a), daß auch $|x_n| \longrightarrow |a|$. Damit existiert zu $\varepsilon := \frac{|a|}{2} > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\big||x_n| - |a|\big| < \varepsilon, \quad \text{also} \quad 0 < \frac{|a|}{2} = |a| - \varepsilon < |x_n| < |a| + \varepsilon.$$

Für alle $n \geq n_0$ gilt dann $\frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|a|}$. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{|x_n|} \leq \max\left\{\frac{1}{|x_1|}, \frac{1}{|x_2|}, ..., \frac{1}{|x_{n_0-1}|}, \frac{2}{|a|}\right\} =: C.$$

b) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| < \frac{\varepsilon\cdot|a|}{C}$, wobei $C > 0$ aus a) (möglich, weil $x_n \longrightarrow a$).
Damit gilt für alle $n \geq n_0$

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - x_n}{x_n \cdot a}\right| = \frac{1}{|x_n|}\cdot\frac{1}{|a|}\cdot|x_n - a| \overset{a)}{\leq} C\cdot\frac{1}{|a|}\cdot|x_n - a| < C\cdot\frac{1}{|a|}\cdot\frac{\varepsilon\cdot|a|}{C} = \varepsilon.$$

Also gilt

$$\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}.$$