MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 12
23.1.2019

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Lösungssvorschlag-

1. a) Setzt man in der Funktionalgleichungen Satz 4.16 b) ii) $y = -x$ so erhält man

$$\cos(x - x) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x)$$

und da der Cosinus eine gerade und der Sinus eine ungerade Funktion ist, folgt daraus mit $\cos 0 = 1$

$$1 = \cos^2(x) + \sin^2(x). \tag{1}$$

b) Setzt man in der Funktionalgleichungen Satz 4.16 b) i) $y = x$ so erhält man

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

Setzt man in der Funktionalgleichungen Satz 4.16 b) ii) $y = x$ so erhält man

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x). \tag{2}$$

c) Die Summe (1) + (2) ergibt

$$1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x)\,,$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{1}{2}(1 + \cos x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Die Differenz (1) - (2) ergibt

$$1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)\,,$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{1}{2}(1 - \cos x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

2. a) Zu zeigen ist $W_f = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

“$\subset$”: Es gilt $\sin^2 x \geq 0$ und $1 + \sin^2 x > 0$ und daher gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} = f(x).$$

Für $\sin^2 x = 0$ gilt

$$f(x) = 0\,.$$

Für $\sin^2 x \neq 0$, gilt

$$f(x) = \frac{1}{\underbrace{1 + \frac{1}{\sin^2 x}}_{\geq 2}} \leq \frac{1}{2}.$$

Somit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, daß

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\,.$$

"$\supset$": Sei $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Da $f(0) = 0$ und $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ ist, gilt $f(0) \leq y \leq f(\frac{\pi}{2})$. Da f offensichtlich stetig ist, ist insbesondere $f\big|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ stetig. Mit dem Zwischenwertsatz erhalten wir somit, daß mindestens ein $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ existiert, so daß $f(\xi) = y$ gilt.

b) Sei $y \in [0, \frac{1}{2}]$. Dann gilt für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}
y = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} &\iff y\left(1 + \sin^2 x\right) = \sin^2 x \\
&\iff y = \sin^2 x(1 - y) \\
&\iff \sin^2 x = \frac{y}{1-y} \\
&\iff \sin x = \sqrt{\frac{y}{1-y}} \qquad \text{(beachte, daß } \sin x \geq 0 \text{ für } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]) \\
&\iff x = \arcsin\sqrt{\frac{y}{1-y}} \qquad [\text{(beachte, daß } \sqrt{\frac{y}{1-y}} \in [0,1] \text{ für } y \in [0, \tfrac{1}{2}])
\end{aligned}$$

Damit ist $f\big|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ umkehrbar mit Wertebereich gleich $[0, \frac{1}{2}]$, und für die Umkehrfunktion gilt

$$\left(f\big|_{[0,\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \arcsin\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,.$$

3. a) Aus der Vorlesung ist bekannt das die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist. Somit ist $x \longmapsto e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ streng monoton fallend und $x \longmapsto -e^{-x}$ ist wiederum streng monoton wachsend. Da die Summe aus zwei streng monoton wachsend Funktionen wieder streng monoton wachsend ist, gilt dies auch für den Sinus Hyperbolicus. Nach Satz 3.19 ist der Sinus Hyperbolicus daher umkehrbar.

b) Sei $y \in \mathbb{R}$. Wir suchen die Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung

$$y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Es ist

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff 2y = e^x - \frac{1}{e^x} \iff (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

Substitution von $u = e^x$ liefert die quadratische Gleichung (in u)

$$u^2 - 2yu - 1 = 0,$$

welche die Lösungen

$$u_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

besitzt. Da $u_2 = y - \sqrt{y^2+1} < 0$ ist die Gleichung $u_2 = e^x$ von keinem $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, und für $u_1 = y + \sqrt{y^2+1} > 0$ liefert

$$y + \sqrt{y^2+1} = e^x$$

dann

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) .$$

Die Umkehrfunktion von sinh heißt übrigens *Areasinus Hyperbolicus*, abgekürzt arsinh, und lautet somit

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) .$$

4. a) Damit der Logarithmus definiert ist muß gelten $2x - x^2 > 0$. Da nun

$$2x - x^2 > 0 \iff x(2-x) > 0 \iff 0 < x < 2\,,$$

ist die Definitionsmenge $D =]0, 2[$.
Es gilt für $x \in D$

$$\begin{aligned} & \log_2(2x - x^2) = 3 \\ \iff\quad & 2^{\log_2(2x-x^2)} = 2^3 \\ \iff\quad & 2x - x^2 = 8 \\ \iff\quad & x^2 - 2x + 8 = 0 \end{aligned}$$

Da diese Gleichung keine Lösung besitzt, ist die Lösungsmenge leer, also $L = \varnothing$.

b) Damit der Logarithmus definiert ist muß gelten $x > 0$. Die Definitionsmenge ist daher $D =]0, \infty[$. Es gilt für $x \in D$

$$\begin{aligned} & 2\log_a x - \log_{2a} x = 2 \\ \iff\quad & 2\frac{\ln x}{\ln a} - \frac{\ln x}{\ln(2a)} = 2 \\ \iff\quad & \ln x \cdot \frac{2\ln(2a) - \ln a}{\ln a \ln(2a)} = 2 \\ \iff\quad & \ln x = \frac{2\ln a \ln(2a)}{2\ln(2a) - \ln a} = \frac{2\ln a \ln(2a)}{\ln(4a)} = 2\ln a \log_{4a}(2a) \\ \iff\quad & x = e^{2\ln a \log_{4a}(2a)} = a^{\log_{4a}(4a^2)} \end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge $L = \left\{a^{\log_{4a}(4a^2)}\right\}$.

c) Der Ausdruck $2^{-x} \cdot 10^{-2x+1}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und daher ist $D = \mathbb{R}$. Es gilt für $x \in D$

$$\begin{aligned} & 2^{-x} \cdot 10^{-2x+1} = 3 \\ \iff\quad & \ln(2^{-x} \cdot 10^{-2x+1}) = \ln 3 \\ \iff\quad & \ln(2^{-x}) + \ln(10^{-2x+1}) = \ln 3 \\ \iff\quad & -x\ln 2 + (-2x+1)\ln 10 = \ln 3 \\ \iff\quad & x(-\ln 2 - 2\ln 10) = \ln 3 - \ln 10 \\ \iff\quad & x = \frac{\ln 3 - \ln 10}{-\ln 2 - 2\ln 10} = \frac{\ln 10 - \ln 3}{\ln 2 + 2\ln 10} = \frac{\ln(\frac{10}{3})}{\ln 200} = \log_{200}\left(\frac{10}{3}\right) \end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge $L = \left\{\log_{200}\left(\frac{10}{3}\right)\right\}$.

d) Der Sinus ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und daher ist $D = \mathbb{R}$. Sei $y = 2x$. Wir suchen zunächst alle Lösungen der Gleichung

$$\sin y = 1$$

Die Einschränkung von sin auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist streng monoton wachsend, also umkehrbar; somit gibt es nur eine Lösung $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ von $\sin y = 1$, nämlich $y = \frac{\pi}{2}$. Da die Einschränkung von sin auf das Intervall $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ streng monoton fallend ist (wegen $\sin(x + \pi) = -\sin x$), gibt es in $]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ keine weiteren Lösungen von $\sin y = 1$. Also ist $y = \frac{\pi}{2}$ die einzige Lösung in dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, welches die Länge 2π hat.
Da der Sinus 2π- periodisch ist, sind alle Lösungen von $\sin y = 1$ also

$$y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Wegen $y = 2x$ sind alle Lösungen von $\sin(2x) = 1$ dann

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

die Lösungsmenge ist also

$$L = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} .$$

e) Der Cosinus und die Exponentialfunktion sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Die Definitionsmenge ist daher $D = \mathbb{R}$. Da $\cos(3x + 1) \in [-1, 1]$ und die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist gilt

$$e^{\cos(3x+1)} \le e^1 < 3\,.$$

Die Lösungsmenge ist daher leer, also $L = \emptyset$.