MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 11
16.1.2019

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Lösungssvorschlag-

1. a) Für $x < 0$ ist $e^x > 0 > x$ und für alle $x \geq 0$ ist

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \underbrace{1}_{>0} + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...}_{>0} > x,$$

also ist

$$e^x \neq x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

b) Für $x < 0$ ist wieder $e^x > 0 > 2x$.
Für $x \in [0, 1[$ ist

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \underbrace{1}_{>x} + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...}_{>0} > x + x = 2x.$$

Für $x \in [1, 2[$ ist

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \underbrace{1}_{>\frac{x}{2}} + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{\geq\frac{x}{2}} + \underbrace{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...}_{>0} > \frac{x}{2} + x + \frac{x}{2} = 2x.$$

Für $x \in [2, \infty[$ ist

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \underbrace{1}_{>0} + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{\geq x} + \underbrace{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...}_{>0} > x + x = 2x.$$

also ist insgesamt

$$e^x \neq 2x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

c) Wir betrachten die stetige Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - 4x.$$

Da $f(0) = 1 > 0$ und $f(1) = e - 4 < 3 - 4 < 0$ gibt es nach dem Nullstellensatz, angewandt auf die stetige Funktion f, ein $\xi \in]0, 1[$ mit $f(\xi) = 0$, also $e^\xi = 4\xi$.
Man kann weiter zeigen (hier aber nicht verlangt!), daß es genau zwei $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $e^x = 4x$.

2. Wir erinnern an das ε-δ-Kriterium für stetige Funktionen: Eine Funktion f heißt stetig in $a \in D$, wenn zu *jedem* $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\forall x \in D$ gilt:

$$|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Wir bestimmen also zu jedem $\varepsilon > 0$ jeweils ein $\delta > 0$ mit der geforderten Eigenschaft. Im folgenden sei $\varepsilon > 0$.

a) Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < \delta$

$$|f(x) - f(a)| = |-3x - (-3a)| = 3 \cdot |x-a| \; < \; 3 \cdot \delta = \varepsilon.$$

b) Es gilt:

$$|x^2 - a^2| = |x-a| \cdot |x+a| = |x-a| \cdot |x-a+2a| \leq |x-a| \cdot (|x-a| + 2|a|)\,,$$

wobei wir im letzten Schritt die Dreiecksungleichung verwendet haben.
Wähle nun $\delta = \sqrt{a^2+\varepsilon} - |a| > 0$. Dann gilt mit $|x-a| < \delta$

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| < \delta \cdot (\delta + 2|a|) = \left(\sqrt{a^2+\varepsilon} - |a|\right)\left(\sqrt{a^2+\varepsilon} + |a|\right) = a^2 - \varepsilon + |a|^2 = \varepsilon.$$

3. a) Behauptung: Es gilt $W_f =]0,1[$.

„$\subset$“: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $0 < e^x < e^x + 1$ und somit $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} < 1$. Wegen $e^x > 0$ ist auch $e^x + 1 > 0$ und somit $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} > 0$. also ist $f(x) \in]0,1[$.

„$\supset$“: Sei $c \in]0,1[$.
Wegen

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1$$

gibt es $b \in \mathbb{R}$ mit $f(b) > c$.
Wegen

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0$$

gibt es $a \in \mathbb{R}, a < b$, mit $f(a) < c$.
Da f als Summe und Quotient stetiger Funktionen stetig ist, ist auch die Einschränkung $f_{[a,b]}$ stetig, und es gilt $f|_{[a,b]}(a) < c < f|_{[a,b]}(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $\xi \in]a,b[$ mit

$$f(\xi) = f|_{[a,b]}(\xi) = c.$$

Also ist $c \in W_f$.

b) Seien x_1, x_2 gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Longrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Longrightarrow e^{x_1+x_2} + e^{x_1} < e^{x_1+x_2} + e^{x_2} \\ &\Longrightarrow e^{x_1}(e^{x_2}+1) < e^{x_2}(e^{x_1}+1) \Longrightarrow \frac{e^{x_1}}{e^{x_1}+1} < \frac{e^{x_2}}{e^{x_2}+1} \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2), \end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt die strenge Monotonie und im vierten Schritt die Positivität der Exponentialfunktion verwendet haben.
Also ist f streng monoton wachsend und streng monotone Funktionen sind nach Satz 3.19 aus der Vorlesung umkehrbar.

c) Sei $y \in]0,1[$. Dann gilt:

$$y = \frac{e^x}{e^x+1} \iff e^x(y-1) = -y \underset{y\neq 1}{\iff} e^x = \frac{y}{1-y} \underset{\frac{y}{1-y}>0}{\iff} x = \ln\frac{y}{1-y}.$$

Damit ist die Umkehrfunktion f^{-1} gegeben durch $f^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \ln\frac{x}{1-x}$.

4. Wir verwenden die Voraussetzung, nämlich daß $\quad f(x\cdot y) = f(x) + f(y) \quad$ für alle $x, y > 0$.

i) Mit $x = y = 1$ gilt $\quad f(1) = f(1\cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, also $f(1) = 0$.

ii) Aus $0 = f(1) = f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ folgt, daß $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ für alle $x > 0$.

iii) Aus $f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$ folgt, daß $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$ für alle $x, y > 0$.