MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 10
9.1.2019

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Lösungssvorschlag-

1. a) Im Falle $f(0) = f(a)$ kann $\xi = a$ gewählt werden; sei also im folgenden $f(0) \neq f(a)$. Wir betrachten die Funktion

$$g : [0, a] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - f(x - a).$$

Da

$$f_1 : [0, a] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x - a,$$

als lineare Funktion stetig ist, ist wegen der Stetigkeit von f auch

$$f_2 = f \circ f_1 : [0, a] \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = f(f_1(x)) = f(x - a),$$

stetig, und damit ergibt sich die Stetigkeit von

$$g = f|_{[0,a]} - f_2 : [0, a] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - f_2(x) = f(x) - f(x - a);$$

darüber hinaus gilt

$$g(0) \cdot g(a) = (f(0) - f(-a))\,(f(a) - f(0)) = -\,(f(a) - f(0))^2 < 0,$$

also $g(0) < 0 < g(a)$ oder $g(0) > 0 > g(a)$. Nach dem Nullstellensatz existiert also ein $\xi \in [0, a]$ (sogar $\xi \in]0, a[$) mit $g(\xi) = 0$; damit gilt aber $f(\xi) = f(\xi - a)$.

b) Die Funktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - a^2)\,(x + 2a)$, ist (als Polynomfunktion) stetig, und es gilt $f(-a) = 0 = f(a)$. Für $\xi \in [0, a]$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\xi) = f(\xi - a) &\iff (\xi^2 - a^2)\,(\xi + 2\,a) = \left((\xi - a)^2 - a^2\right)((\xi - a) + 2\,a)\\
&\iff (\xi - a)\,(\xi + a)\,(\xi + 2\,a) = (\xi^2 - 2\,\xi\,a)\,(\xi + a)\\
&\underset{\xi+a>0}{\iff} (\xi - a)\,(\xi + 2\,a) = \xi^2 - 2\,\xi\,a\\
&\iff \xi^2 + a\,\xi - 2\,a^2 = \xi^2 - 2\,\xi\,a \iff 3\,\xi\,a = 2\,a^2 \underset{a>0}{\iff} \xi = \tfrac{2}{3}\,a.
\end{aligned}$$

2. Wir definieren die Funktion $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \text{ für } \quad x \in [0, 1[\\ x - 1 & , \text{ für } \quad x \in [1, 2[\\ \;\;3 & , \text{ für } \quad x = 2 \end{cases} \quad .$$

Die Funktion ist f umkehrbar, da, wie man leicht überprüft, die Gleichung $f(x) = y$ für alle $y \in \mathbb{R}$ höchstens eine Lösung hat, und zwar genau eine Lösung für $y \in [0, 2[\cup \{3\}$. Damit ist die Wertemenge

$$W_f = [0, 2[\cup \{3\}.$$

Als Umkehrfunktion ergibt sich dann

$$f^{-1} : [0,2[\cup\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} x+1 & , \text{ für } \quad x \in [0,1[\\ x-1 & , \text{ für } \quad x \in [1,2[\\ \;\; 2 & , \text{ für } \quad x = 3 \end{cases} .$$

Damit ist f^{-1} nicht stetig, denn an der Stelle $x = 1$ ist

$$\lim_{x \to 1-} f^{-1}(x) = 2 \neq 0 = \lim_{x \to 1+} f^{-1}(x).$$

3. Die beiden auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1,1]$ definierten und als stetig vorausgesetzten Funktionen $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ und $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ besitzen nach dem Satz von Weierstraß jeweils ein globales Maximum, es gibt also $p_1, p_2 \in [-1,1]$ mit $f(x) \leq f(p_1)$ und $g(x) \leq g(p_2)$ für alle $x \in [-1,1]$; damit gilt

$$f(p_1) = \sup\{f(x) \mid -1 \leq x \leq 1\} = \sup\{g(x) \mid -1 \leq x \leq 1\} = g(p_2).$$

Für $p_1 = p_2$ wählen wir $x_0 = p_1 \in [-1,1]$, und es gilt $f(x_0) = f(p_1) = g(p_2) = g(x_0)$. Für $p_1 \neq p_2$ können wir (aufgrund der bezüglich f und g symmetrischen Problemstellung) schon $p_1 < p_2$ annehmen und betrachten die Hilfsfunktion

$$h : [p_1, p_2] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

Damit ist h als Differenz der stetigen Funktionen f und g selbst stetig mit

$$\begin{aligned} h(p_1) = f(p_1) - g(p_1) & \underset{g(p_1) \leq g(p_2)}{\geq} f(p_1) - g(p_2) = 0, \\ h(p_2) = f(p_2) - g(p_2) & \underset{f(p_2) \leq f(p_1)}{\leq} f(p_1) - g(p_2) = 0, \end{aligned}$$

und nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_0 \in [p_1, p_2] \subset [-1,1]$ mit $h(x_0) = 0$, also $f(x_0) = g(x_0)$.

4. Wir betrachten die Funktion

$$h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - x.$$

h ist als Differenz der stetigen Funktion f und der ebenfalls stetigen Identität auf $[0,1]$ stetig. Aus $W_f \subset [0,1]$ folgt, daß

$$h(0) = f(0) - 0 \geq 0, \qquad \text{sowie} \qquad h(1) = f(1) - 1 \leq 0.$$

Nach dem Nullstellensatz gibt es also ein $\xi \in [0,1]$, so daß $h(\xi) = f(\xi) - \xi = 0$ ist, also $f(\xi) = \xi$.