MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 1
24.10.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Lösungssvorschlag-

1. a) Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion:

   Induktionsanfang: $n = 0$: Es ist $a_0 = 3$ und damit $a_0 \geq 2$.

   Induktionsschluß: „$n \to n+1$“: Sei $n \geq 0$ und gelte $a_n \geq 2$; z.z. ist $a_{n+1} \geq 2$.

   Es ist $a_n \geq 2$, insbesondere also $a_n > 0$, und es folgt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2 &= \frac{a_n^2 + 4}{2\,a_n} - 2 = \frac{(a_n^2+4) - 2\cdot(2\,a_n)}{2\,a_n} \\ &= \frac{a_n^2 - 4\,a_n + 4}{2\,a_n} = \frac{(a_n-2)^2}{2\,a_n} \geq 0, \end{aligned}$$

   also gilt $a_{n+1} \geq 2$.

   b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen $a_n \geq 2$ zum einen $a_n^2 \geq 4$, also $4 - a_n^2 \leq 0$, und zum anderen $2a_n \geq 4 > 0$, woraus sich

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2+4}{2\,a_n} - a_n = \frac{(a_n^2+4) - a_n\cdot(2\,a_n)}{2\,a_n} = \frac{4-a_n^2}{2\,a_n} \leq 0$$

   und damit $a_{n+1} \leq a_n$ ergibt; folglich ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend.

2. a) Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion:

   Induktionsanfang: $n = 1$: Für $n = 1$ erhält man die richtige Gleichung $\frac{1}{(4-3)\cdot(4+1)} = \frac{1}{5}$.

   Induktionsschluß: „$n \to n+1$“: Sei $n \geq 1$ und gelte $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$;

   z.z. ist $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n+1}{4n+5}$.

   Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)} + \frac{1}{(4(n+1)-3)\cdot(4(n+1)+1)} \\ &= \frac{n}{4n+1} + \frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)} \\ &= \frac{n\cdot(4n+5)+1}{(4n+1)\cdot(4n+5)} = \frac{4n^2+5n+1}{(4n+1)\cdot(4n+5)} \\ &= \frac{n+1}{4n+5}\cdot\frac{4n+1}{4n+1} = \frac{n+1}{4n+5}, \end{aligned}$$

   also ist die Induktionsbehauptung gezeigt.

b) Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion:

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 5$: Für $n = 5$ erhält man die richtige Gleichung

$$2^5 = 32 > 25 = 5^2.$$

<u>Induktionsschluß:</u> „$n \to n+1$": Sei $n \geq 5$ und gelte $2^n > n^2$;
z.z. ist $2^{n+1} > (n+1)^2$.

Wir bemerken zuerst, daß für alle $n \geq 3$ gilt $(n-1)^2 > 2$, woraus $n^2 - 2n + 1 > 2$ und damit

$$n^2 > 2n + 1 \qquad (*)$$

folgt. Nun gilt

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 \overset{(*)}{>} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

also ist die Induktionsbehauptung gezeigt.

3. a) Es gilt

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= \sqrt{13} \\
a_3 &= \sqrt{12 + \sqrt{13}} \\
a_4 &= \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{13}}} \\
a_5 &= \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{13}}}}
\end{aligned}$$

b) Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion:

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 1$: Für $n = 1$ ist

$$0 \leq a_1 = 1 \leq \sqrt{13} = a_2.$$

<u>Induktionsschluß:</u> „$n \to n+1$": Sei $n \geq 1$ und gelte $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$;
z.z. ist $0 \leq a_{n+1} \leq a_{n+2}$.

Es ist aufgrund von $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$ auch $0 \leq a_{n+1}$, und es gilt ferner

$$\begin{aligned}
a_n &\leq a_{n+1} \\
\Longrightarrow 12 + a_n &\leq 12 + a_{n+1} && (12 + a_n \geq 0) \\
\Longrightarrow \sqrt{12 + a_n} &\leq \sqrt{12 + a_{n+1}} \\
\Longrightarrow a_{n+1} &\leq a_{n+2}.
\end{aligned}$$

c) Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $n = 1$: Für $n = 1$ ist $a_1 = 1 \leq 13$.

Induktionsschluß: „$n \to n + 1$“: Sei $n \geq 1$ und gelte $a_n \leq 13$;
z.z. ist $a_{n+1} \leq 13$.

Es ist mit $a_n \leq 13$

$$a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n} \leq \sqrt{12 + 13} = \sqrt{25} = 5 \leq 13.$$

4. a) Die Aussage ist wahr. Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist auch die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, denn:

$$\begin{aligned} &(x_n)_{n\in N} \text{ beschränkt } \Rightarrow \forall n \in\mathbb{N} : |x_n| \leq C_1 \\ &(y_n)_{n\in N} \text{ beschränkt } \Rightarrow \forall n \in\mathbb{N} : |y_n| \leq C_2 \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq C_1 + C_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

d.h. die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

b) Die Aussage ist wahr! Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist auch die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, denn:

$$\begin{aligned} &(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt } \Rightarrow \forall n \in\mathbb{N} : |x_n| \leq C_1 \\ &(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt } \Rightarrow \forall n \in\mathbb{N} : |y_n| \leq C_2 \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq C_1 \cdot C_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

d.h. die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

c) Die Aussage ist falsch! Man betrachte folgendes Gegenbeispiel:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sei gegeben durch } x_n = \begin{cases} 0 \text{ , für } n \text{ gerade} \\ n \text{ , für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sei gegeben durch } y_n = \begin{cases} n \text{ , für } n \text{ gerade} \\ 0 \text{ , für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit ist die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als konstante Folge mit $x_n \cdot y_n = 0$ beschränkt, jedoch sind die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide nicht beschränkt.