MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 8
12.12.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
konvergiert, in folgenden Fällen:
   a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$,
   b) Die Folge $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$,
   c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine monoton fallende Nullfolge, und für alle $n \geq 1$ ist $a_n \geq \frac{1}{n}$.

2. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:
$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n+n^2-n^3+n^4-n^5}{n^7} \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+2}\right).$$

3. Bestimmen Sie die $a \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+3x-4}{x^2-1}, & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \\ 3 \quad , & \text{für } x \in \{-1,1\} \end{cases} \quad ,$$
stetig ist.
Hinweis: Schreiben Sie (Polymondivision!) den Zähler als Produkt: $x^3 + 3x - 4 = (x-1)\cdot(x^2+x+4)$.

4. Gegeben sei die Funktion
$$f :]0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{4\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$
   a) Zeigen Sie, daß $f(x) > 4$ für alle $x \in]0,\infty[$.
   b) Zeigen Sie, daß für alle $y \in]4,\infty[$ genau ein $x \in]0,\infty[$ existiert mit $f(x) = y$.
   c) Folgern Sie aus a) und b), daß für den Wertebereich W_f gilt $W_f =]4,\infty[$, sowie daß f umkehrbar ist, und geben Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$ explizit an.

Abgabe bis 19.12.2018, 12:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).