MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 6
28.11.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. a) Zeigen Sie anhand der harmonischen Reihe, daß die folgende Aussage über reelle Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.a. falsch ist:

$$\Big[\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ :\ |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon\ \Big] \quad \Longrightarrow \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge}$$

   b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $c_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$, so, daß

$$|x_{n+1} - x_n| \leq c_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

   Zeigen Sie: Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent, so ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

2. a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^4 - 3n^2 + n - 1} \qquad \text{ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2 - 3\,n + 1} \qquad \text{iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n + 4^n}$$

   b) Zeigen Sie, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}.$$

   Hinweis: Es ist für $k \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}$.

3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3x}{x^2 + 2}\right)^k.$$

   Bestimmen Sie die Menge D aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, sowie die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

4. Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Zeigen oder widerlegen Sie:

   a) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \text{ (absolut) konvergent}$$

   b) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \text{ konvergent.}$$

Abgabe bis 5.12.2018, 12:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).