MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 5
21.11.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. Seien $x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$, und für $n \in \mathbb{N}$ sei a_n gegeben durch

$$a_n = \frac{x^n}{1 + y^n}.$$

   a) Zeigen Sie, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist für $0 < x < 1$.
   b) Zeigen Sie, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für $x = 1$ und geben Sie den Grenzwert an.
   c) Sei $x > 1$. Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

2. Zeigen Sie, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$$

   konvergent ist.

   Hinweis: Zeigen Sie, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Cauchy-Folge ist. Verwenden Sie $\frac{1}{i(i-1)} = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}$.
   Bemerkung: Leonhard Euler zeigte im Jahr 1735, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\pi^2/6$ konvergiert.

3. Geben Sie jeweils Beispiele von Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ an, so daß die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

   a) bestimmt divergiert gegen ∞.
   b) bestimmt divergiert gegen $-\infty$.
   c) gegen eine beliebig vorgegebene reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ konvergiert.
   d) beschränkt ist, aber divergiert.

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $q \in \mathbb{R}$, mit folgender Eigenschaft

$$|f(x) - f(y)| \leq q\,|x - y| \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

   Sei $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, daß dann auch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = f(x'_n) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

   konvergiert.

   Bemerkung: Obige Eigenschaft nennt man Lipschitz-Stetigkeit von f. Der Zusammenhang zwischen Konvergenz einer Folge und Konvergenz der Folge der Funktionswerte der Folgenglieder gilt schon bei schwächeren Voraussetzungen an f. Hierzu mehr im Verlauf der Vorlesung.

Abgabe bis 28.11.2018, 12:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).