MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 4
14.11.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. Gegeben seien die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \frac{(2\,n^2+3)^3}{(3\,n^3+2)^2} \qquad \text{und} \qquad y_n = \frac{(2n^2+1)(n+1)^n}{(3n+1)\,n^{n+1}}.$$

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

2. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = 1\ , \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right), \quad n \geq 1.$$

In Ü.bl. 3/ Aufg. 2 wurde bereits gezeigt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n \in [1,2]$, und, **falls** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist der Grenzwert keine rationale Zahl, sondern $a = \sqrt{2}$. Wir zeigen nun direkt, daß $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$:

a) Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$h_n = a_n - \sqrt{2}.$$

Fügen Sie in der folgenden Zeile, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten soll, die korrekten Zwischenschritte an den mit “ … “ gekennzeichneten Stellen ein:

$$|h_{n+1}| = \ \ldots\ = \left|\frac{h_n^2 - \sqrt{2}\cdot h_n}{3a_n}\right| = \ \ldots\ \leq\ |h_n| \cdot \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

und folgern Sie mit Hilfe von 1.30 b), daß $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$.

b) Betrachten Sie im Vergleich die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_1 = 1\ , \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad n \geq 1.$$

(siehe Beispiel 1.29). Welche der beiden Folgen konvergiert „schneller“ gegen $\sqrt{2}$? Schreiben Sie dazu jeweils die ersten 5 Folgenglieder an und stellen Sie eine Vermutung auf.
Bemerkung: Die in b) betrachtete Folge zur Bestimmung von Wurzeln war schon ca. 1750 v. Chr. den Babyloniern geläufig. Das Verfahren ist daher auch als babylonisches Wurzelziehen bekannt.

3. Sei $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie für die folgenden Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils ein passendes $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $| a_n | < \varepsilon$:

   a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+a^2}}$, mit $a \in \mathbb{R}$

   b) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ [siehe Vorlesung 1.32 e) ... oder Trick: Klammern Sie $\sqrt{n}$ aus.]

   c) $a_n = \sqrt[3]{n^2+a^2} - \sqrt[3]{n^2}$, mit $a \in \mathbb{R}$ [Trick: Klammern Sie $\sqrt[3]{n^2}$ aus.]

4. Sei a eine reelle Zahl, und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Es sei

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = a^2.$$

   Beweisen Sie: Ist c Grenzwert einer konvergenten Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so ist $c = a$ oder $c = -a$.

Abgabe bis 21.11.2018, 12:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).