MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 3
07.11.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die angegebenen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und bestimmen Sie jeweils den Grenzwert.

$$\text{(i)}\quad x_n = n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2\right)\ , \qquad \text{(ii)}\quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+2}\ ,$$

$$\text{(iii)}\quad x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2i}\ ,$$

2. Gegeben sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n + \frac{4}{x_n}\right), \quad n \geq 1.$$

   a) Zeigen Sie, daß $x_n \in \mathbb{Q} \cap [1,2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   b) „Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine rationale Zahl“. Zeigen Sie, daß diese Behauptung falsch ist.

3. Zeigen Sie, daß die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent sind und bestimmen Sie jeweils den Grenzwert a.

   a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist rekursiv definiert durch den Startwert

$$a_0 = 3 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{2a_n}, \quad n \geq 0.$$

   (In Ü.bl. 1/Aufg. 1 schon gezeigt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend und $a_n \in [2,3]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.)

   b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist rekursiv definiert durch den Startwert

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}\ , \quad n \geq 0.$$

   (In Ü.bl. 1/Aufg. 3 schon gezeigt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend und $a_n \in [1,13]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.)

4. Zeigen Sie, daß für jeden Startwert $x_0 \in [0,3]$ die durch die Rekursion

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}\left(x_n^2 + 6\right), \qquad n \geq 0,$$

   definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert und bestimmen Sie jeweils den Grenzwert.

   Hinweis: Treffen Sie die Fallunterscheidungen $x_0 = 2, x_0 = 3, x_0 \in]2,3[$ und $x_0 \in [0,2[$.

Abgabe bis 14.11.2018, 12:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).