MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 2
31.10.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)"

1. Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit

$$a_n = \frac{2\,n+1}{n+2} \qquad \text{bzw.} \qquad b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie jeweils die ersten fünf Folgenglieder.

b) Untersuchen Sie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie.

c) Sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt? Antwort mit Begründung!

2. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Folgenkonvergenz, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \frac{3n^2}{n^2+n-1}$$

gegen $a = 3$ konvergiert.

3. Gegeben sei die Folge $(x_n)_{n\geq 2}$ mit

$$x_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right).$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, gilt $x_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$.

4. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Gelte $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \neq 0$.

a) Finden Sie ein $C > 0$ so, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{|x_n|} \leq C.$$

b) Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der Folgenkonvergenz, daß

$$\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}.$$

Abgabe bis 7.11.2018, 12:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).