MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 12
23.1.2019

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. Zeigen Sie unter Verwendung der Additionstheoreme 4.16 b) i) und ii), daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

   i) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

   ii) $\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$ und $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

   iii) $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos x\big)$ und $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(1 + \cos x\big)$

2. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}.$$

   a) Zeigen Sie, daß $W_f = [0, \frac{1}{2}]$.

   b) Zeigen Sie, daß die Einschränkung von f auf das Interval $[0, \frac{\pi}{2}]$, also $f|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$, umkehrbar ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $f|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$.

3. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

   (vgl. Aufgabe 3 auf Tut-Blatt 12) streng monoton wachsend ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion von sinh.

4. Geben Sie die Definitionsmenge D und Lösungsmenge L folgender Gleichungen an:

   a) $\log_2(2x - x^2) = 3$

   b) $2\log_a x - \log_{2a} x = 2$ mit $a > 1$ fest gewählt.

   c) $2^{-x} \cdot 10^{-2x+1} = 3$

   d) $\sin(2x) = 1$

   e) $e^{\cos(3x+1)} = 3.$

Abgabe bis 30.1.2019, 12:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).