MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 1
24.10.2018

Übung zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)"

1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{2\,a_n}, \quad n \geq 0.$$

   Zeigen Sie:

   a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $a_n \geq 2$.

   b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend.

2. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

   a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

   b) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$, gilt $2^n > n^2$.

3. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n} \quad n \geq 1.$$

   a) Geben Sie die ersten 5 Folgenglieder (unter Verwendung des Wurzelzeichens) an.

   b) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$0 \leq a_n \leq a_{n+1}.$$

   c) Zeigen Sie, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben durch 13 beschränkt ist.

4. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   a) Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide beschränkt, so ist auch $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

   b) Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide beschränkt, so ist auch $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

   c) Ist $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Abgabe bis 31.10.2018, 12:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).