MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 9
17.12.2018

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Die Eigenschaft (1) ist für **jede** Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ erfüllt, denn gemäß der Definition einer Funktion wird jedem x aus dem Definitionsbereich, also $x \in D$, genau ein y aus dem Zielbereich, also $y \in \mathbb{R}$, zugeordnet.

   Die Eigenschaft (2) ist die Definition von $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bijektiv, was die Injektivität, also die Umkehrbarkeit von f, impliziert, aber nicht dazu äquivalent ist.

   (2) kann auf folgende zwei Weisen richtiggestellt werden. Es ist

$$\begin{aligned} &f : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ umkehrbar} \\ &\qquad :\Longleftrightarrow \text{ „Zu jedem } y \in \mathbb{R} \text{ gibt es } \textbf{höchstens} \text{ ein } x \in D \text{ mit } f(x) = y\text{“} \\ &\qquad \Longleftrightarrow \text{ „Zu jedem } y \in W_f \text{ gibt es genau ein } x \in D \text{ mit } f(x) = y\text{“} \end{aligned}$$

   b) Wir zeigen:

$$W_f =]0, 1[.$$

   „$\subset$“:
   Sei $x \in]0, \infty[$. Dann ist

$$0 < f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} < \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1,$$

   also $f(x) \in]0, 1[$, und damit $W_f \subset]0, 1[$.

   „$\supset$“:
   Sei $y \in]0, 1[$. Dann gilt für $x \in]0, \infty[$

$$\begin{aligned} f(x) = y \Longleftrightarrow\ & \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = y \\ \Longleftrightarrow\ & \sqrt{x} = y(\sqrt{x} + 1) \\ \Longleftrightarrow\ & \sqrt{x}(1 - y) = y \\ \Longleftrightarrow\ & \sqrt{x} = \frac{y}{\underbrace{1 - y}_{>0}} \\ \Longleftrightarrow\ & x = \left(\frac{y}{1 - y}\right)^2. \end{aligned}$$

   Mit $x = \left(\frac{y}{1-y}\right)^2 \in]0, \infty[$ ist also $f(x) = y$ (das ist „$\Longleftarrow$“ in obiger Äquivalenzkette) Damit ist $y \in W_f$ und also $W_f \supset]0, 1[$.

   Da, wie eben gezeigt, zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in]0, \infty[$ existiert mit $f(x) = y$, ist f umkehrbar mit Umkehrfunktion

$$f^{-1} :]0, 1[\to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{1 - x}\right)^2.$$

2. a) Setze $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1+2\,x+3\,x}{x^2+x+1}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge (o.E. $x_n \neq 0$) mit $x_n \longrightarrow \infty$; dann gilt $\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und damit

$$f(x_n) = \frac{1+2\,x_n+3\,x_n^2}{x_n^2+x_n+1} = \frac{x_n^2\left(\frac{1}{x_n^2}+\frac{2}{x_n}+3\right)}{x_n^2\left(1+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n^2}\right)} = \frac{\frac{1}{x_n^2}+\frac{2}{x_n}+3}{1+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0+0+3}{1+0+0} = 3,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 3$ und damit, da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to \infty$ beliebig war, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$.

[Ohne Folgen explizit zu erwähnen, schreiben wir das dann auch kurz so:
Für $x \neq 0$ ist

$$f(x) = \frac{1+2\,x+3\,x^2}{x^2+x+1} = \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+3\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+3}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0+0+3}{1+0+0} = 3,$$

also $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$.
Oder mit „$\lim\limits_{x\to\infty}$“ und ohne Erwähnung von f dann so:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+2\,x+3\,x^2}{x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+3\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+3}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{0+0+3}{1+0+0} = 3.$$]

b) Es ist

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\overbrace{x^3+2x}^{\to 3}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0,\ x^2-1>0}} = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 1-} \frac{\overbrace{x^3+2x}^{\to 3}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0,\ x^2-1<0}} = -\infty.$$

Also existiert $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x}{x^2-1}$ **nicht**, auch nicht uneigentlich.

c) Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-x^3+2x-1}{(x+1)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4-x^3+2x-1}{x^3+3x^2+3x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)}{x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}_{\to 1} = \infty.$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} (x-[x])$ existiert **nicht**, auch nicht uneigentlich, denn:
Sei $x_n := n,\ n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_n \longrightarrow \infty$ und

$$x_n - [x_n] = n - [n] = n - n = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sei $y_n := n + \frac{1}{2},\ n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $y_n \longrightarrow \infty$ und

$$y_n - [y_n] = n + \frac{1}{2} - [n + \frac{1}{2}] = n + \frac{1}{2} - n = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Da die beiden Limiten nicht übereinstimmen, existiert $\lim\limits_{x\to\infty} (x-[x])$ nicht.

3. Für alle t, $m \in \mathbb{R}$ gilt:

- Die Einschränkung $f|_{]-\infty,-1[}$ von f auf das offene Intervall $]-\infty,-1[$ ist als lineare Funktion insbesondere stetig, weswegen f in allen Punkten $a \in\ ]-\infty,-1[$ stetig ist: für $x \in\ ]-\infty,-1[$ ist nämlich
$$f(x) = t\,x + m \underset{x\to a}{\longrightarrow} t\,a + m = f(a).$$
- Die Einschränkung $f|_{]-1,1[}$ von f auf das offene Intervall $]-1,1[$ ist als quadratische Funktion insbesondere stetig, weswegen f in allen Punkten $a \in\ ]-1,1[$ stetig ist: für $x \in\ ]-1,1[$ ist nämlich
$$f(x) = x^2 + t\,m\,x + 1 \underset{x\to a}{\longrightarrow} a^2 + t\,m\,a + 1 = f(a).$$
- Die Einschränkung $f|_{]1,\infty[}$ von f auf das offene Intervall $]1,\infty[$ ist als lineare Funktion insbesondere stetig, weswegen f in allen Punkten $a \in\ ]1,\infty[$ stetig ist: für $x \in\ ]1,\infty[$ ist nämlich
$$f(x) = m\,x + t \underset{x\to a}{\longrightarrow} m\,a + t = f(a).$$

Es bleiben die Punkte $a = -1$ und $a = 1$ zu betrachten.
Wegen
$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \left(x^2 + t\,m\,x + 1\right) = 2 - t\,m = f(-1)$$
und
$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} (t\,x + m) = -t + m$$
ist f im Punkt $a = -1$ genau dann stetig, wenn
$$2 - t\,m = -t + m.$$

Wegen
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (m\,x + t) = m + t$$
und
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \left(x^2 + t\,m\,x + 1\right) = 2 + t\,m = f(1)$$
ist f im Punkt $a = 1$ genau dann stetig, wenn
$$m + t = 2 + t\,m.$$

Insgesamt ist also die Funktion f genau dann stetig, wenn
$$2 - t\,m = m - t \qquad \text{und} \qquad 2 + t\,m = m + t$$
gilt. Aus beiden Gleichungen zusammen folgt durch Addition
$$4 = 2\,m,$$
also $m = 2$ und damit $t = 0$; umgekehrt erfüllt das Paar $(t,m) = (0,2)$ beide Gleichungen.

Die also genau im Falle $(t,m) = (0,2)$ stetige Funktion lautet
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2 & , \text{ für } x < -1, \\ x^2 + 1 & , \text{ für } -1 \le x \le 1, \\ 2\,x & , \text{ für } 1 < x. \end{cases}$$

4. <u>1. Fall</u>: $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$:
Die Menge $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ ist Vereinigung von (unendlich vielen) <u>offenen</u> Intervallen

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{N} = \ ]-\infty, 1[\,\cup\,]1,2[\,\cup\,]2,3[\,\cup\,]3,4[\,\cup\ldots$$

Als rationale Funktion ist die Einschränkung $f|_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}}$ stetig, also ist f stetig in allen $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ (siehe 3.9b)).

<u>2. Fall</u>: $a = 2$:
Hier ist

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \frac{x}{x-2} = \infty.$$

Damit kann f in $a = 2$ gar nicht stetig sein. (Wegen $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} \frac{x}{x-2} = -\infty$ existiert $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ nicht einmal uneigentlich)

<u>3. Fall</u>: $a \in \mathbb{N}\backslash\{2\}$:
Hier gilt

$$\begin{aligned}
f \text{ ist stetig in } a &\iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \\
&\iff \lim_{x\to a} \frac{x}{x-2} = f(a) \\
&\iff \frac{a}{a-2} = \frac{4a-6}{a+1} \\
&\iff a(a+1) = (4a-6)(a-2) \\
&\iff a^2 + a = 4a^2 - 8a - 6a + 12 \\
&\iff 3a^2 - 15a + 12 = 0 \\
&\iff a^2 - 5a + 4 = 0 \\
&\iff (a-1)(a-4) = 0 \\
&\iff a = 1 \ \vee \ a = 4.
\end{aligned}$$

Also ist im 3. Fall f genau in $a \in \{1,4\}$ stetig.

Zusammenfassen ist f also genau in den Punkten

$$a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N} \ \cup \ \{1,4\}$$

stetig.