MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 8
10.12.2018

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Um für den Beweis der Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ das Wurzelkriterium anwenden zu können, braucht man gemäß 2.22 a)

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \qquad \text{für (fast) alle } k \in \mathbb{N}; \tag{1}$$

die Eigenschaft „ $\sqrt[k]{|a_k|} < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$“ reicht nicht aus!
In der Tat gibt es für die vorliegende Reihe wegen

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{k} = 1.$$

kein $q < 1$, so daß (1) erfüllt ist und das Wurzelkriterium macht in diesem Fall keine Aussage zur Konvergenz oder Divergenz der Reihe.

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^k$ ist übrigens divergent! Es gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1} \neq 0. \tag{+}$$

Damit ist die Folge $\left(\left(\frac{k-1}{k}\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ **keine** Nullfolge, also die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^k$ wegen 2.3 divergent.

<u>Beweis zu (+)</u>: Dies folgt für $x = -1$ aus

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^x,$$

<u>oder</u>, falls man nur auf $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e$ zurückgreifen will, so:
Es ist für $k \geq 2$

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k &= \left(\frac{k-1}{k}\right)^k = \frac{1}{\left(\frac{k}{k-1}\right)^k} = \frac{1}{\left(\frac{k-1+1}{k-1}\right)^k} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^k} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e \cdot 1} = \frac{1}{e} = e^{-1}.\end{aligned}$$

2. Bei der zu betrachtenden Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{1}{2n-1} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

handelt es sich um eine alternierende Reihe; da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Leibnizkriterium. Für den Reihenwert

$$s = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

dieser klassischen Reihe ist zwar $s = \frac{\pi}{4}$ angegeben, der konkrete Wert von s ist allerdings für die folgende Überlegung unerheblich. Mit Bemerkung 2.16 b) gilt für die n-te Partialsumme $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$, daß

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}| \tag{2}$$

mit

$$|a_{n+1}| = a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n}.$$

Wegen

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2}\cdot 10^{-4} \iff \frac{1}{n} \leq 10^{-4} \iff n \geq 10^4$$

können wir $N = 10^4 \in \mathbb{N}$ wählen und erhalten damit insgesamt

$$\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right| = |s - s_N| \leq a_{N+1} \leq \frac{1}{2N} \leq \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}.$$

[Beweis von (2): siehe Beweis zu 2.15! Hier noch einmal das wesentliche Argument:
Man erhält für die Partialsummen von ungeradem Index

$$s_{2j+1} - s_{2j-1} = (-1)^{2j+1}a_{2j} + (-1)^{2j+2}a_{2j+1} = -a_{2j} + a_{2j+1} \leq 0$$

und damit $s_{2j+1} \leq s_{2j-1}$ sowie für die Partialsummen von geradem Index

$$s_{2j+2} - s_{2j} = (-1)^{2j+2}a_{2j+1} + (-1)^{2j+3}a_{2j+2} = a_{2j+1} - a_{2j+2} \geq 0$$

und damit $s_{2j+2} \geq s_{2j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$; damit sind die beiden Teilfolgen $(s_{2j-1})_{j\in\mathbb{N}}$ bzw. $(s_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ monoton fallend bzw. monoton wachsend. Es ist also

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq s_8 \leq \ldots \leq s \leq \ldots \leq s_7 \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1.$$

Folglich liegt s stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen s_n und s_{n+1}, so daß sich

$$|s - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = \left|(-1)^{n+2}a_{n+1}\right| = |a_{n+1}|$$

ergibt.]

3. a) Bekanntlich konvergiert die Exponentialreihe auf ganz $\mathbb{R}$; damit konvergiert aber für alle $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}$$

Zum selben Ergebnis kommt man auch mit Hilfe des Quotientenkriteriums 2.24.

b) Zu betrachten ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{3^n}{n!} x^{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für $x = 0$ gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Für $x \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{3^{n+1} \cdot x^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n \cdot x^{n^2}}\right| = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{|x|^{n^2+2n+1}}{|x|^{n^2}}$$
$$= 3 \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |x|^{2n+1} = 3 \cdot \frac{|x|^{2n+1}}{n+1};$$

dies legt die folgende Fallunterscheidung nahe:

- Im Falle $|x| \leq 1$ ist

  $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 3 \cdot \frac{|x|^{2n+1}}{n+1} \leq \frac{3}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{also} \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1;$$

  damit ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium konvergent.

- Im Falle $|x| > 1$ ist auch $x^2 > 1$. Wir betrachten den Kehrwert $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Es gilt

  $$0 \leq \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n+1}{3|x|^{2n+1}} \leq \frac{2n}{3|x| \cdot |x|^{2n}} = \frac{2}{3|x|} \cdot \frac{n}{(x^2)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3|x|} \cdot 0 = 0$$

  unter Verwendung von 1.32 c) mit $b = x^2 > 1$. Also gilt nach dem Schrankenlemma

  $$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

  woraus sofort

  $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

  folgt. Damit ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium 2.24 divergent.

4. Wir zeigen

„$\Longrightarrow$“: Es ist

$$0 \leq \frac{a_k}{\underbrace{a_k}_{\geq 0} + 1} \leq \frac{a_k}{0+1} = a_k \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da nach Vorsaussetzung die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist, folgt nach dem Majorantenkriterium die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{a_k+1}$.

„$\Longleftarrow$“: Weil die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{a_k+1}$ konvergiert, gilt $\frac{a_k}{a_k+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Damit existiert zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\forall\, k \geq k_0$ gilt

$$\frac{a_k}{a_k+1} < \frac{1}{2},$$

was äquivalent ist zu $a_k < \frac{1}{2}(a_k+1)$ bzw. $\frac{1}{2}a_k < \frac{1}{2}$ bzw.

$$a_k < 1 \qquad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Damit gilt für alle $k \geq k_0$

$$\frac{a_k}{\underbrace{a_k}_{\leq 1} + 1} \geq \frac{a_k}{1+1} = \frac{a_k}{2} \geq 0.$$

Da nach Vorsaussetzung die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{a_k+1}$ konvergent ist, folgt nach dem Majorantenkriterium die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2}$, und damit ist auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.