MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 7
3.12.2018

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Die Aussage (1) ist i.a. falsch, denn wähle z.B.

$$a_k = \frac{1}{k} \qquad \text{und} \qquad b_k = -\frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

so sind die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ beide divergent, weil die harmonische Reihe divergiert. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 0$ ist jedoch trivialerweise konvergent.

Die Aussage (2) ist i.a. falsch, denn wähle z.B.

$$a_k = \frac{1}{k}\ ,\ k \in \mathbb{N}, \qquad \text{und} \qquad \lambda = 0,$$

so ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent (harmonische Reihe!), die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 0$ ist jedoch trivialerweise konvergent.

b) Die korrekten Aussagen sind

$$\sum_k a_k \text{ divergent} \quad \wedge \quad \sum_k b_k \quad \textbf{konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_k (a_k + b_k) \text{ divergent} \qquad (+)$$

$$\sum_k a_k \text{ divergent} \quad \wedge \quad \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad \Longrightarrow \quad \sum_k (\lambda a_k) \text{ divergent} \qquad (++)$$

Beweis zu (+):
Annahme: $\sum\limits_k (a_k + b_k)$ ist konvergent. Nach den Rechenregln für konvergente Reihen 2.7 ist mit $\sum\limits_k b_k$ konvergent, auch $\sum\limits_k(-b_k)$ konvergent, und demnach auch die Reihe $\sum\limits_k(a_k + b_k - b_k) = \sum\limits_k a_k$ konvergent, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Beweis zu (++):
Annahme: $\sum\limits_k(\lambda a_k)$ ist konvergent. Nach den Rechenregln für konvergente Reihen 2.7 ist dann auch die Reihe $\sum\limits_k \frac{1}{\lambda}(\lambda a_k) = \sum\limits_k a_k$ konvergent, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

c) Sei $a_k = \frac{1}{k}$ und $b_k = -\frac{1}{k^2}, k \in \mathbb{N}$. Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent und die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k^2}\right)$ konvergent. Nach (+) ist dann die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right)$$

divergent.

2. a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $2n+1>0$ und es gilt für $n \geq 1$

$$\frac{1}{2n+\underbrace{1}_{\leq n}} \geq \frac{1}{2n+n} = \frac{1}{3n} \geq 0.$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ ist divergent, da die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. Nach dem Minorantenkriterium 2,13 ist dann auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ divergent, und damit auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ divergent

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n^2+3 \geq 0$ und $2n^5-n^2+1>0$ und es gilt für $n \geq 1$

$$0 \leq \left|\frac{n^2+3}{2n^5-n^2+1}\right| = \frac{n^2+3}{2n^5 \underbrace{-n^2}_{\geq -n^5} + \underbrace{1}_{\geq 0}} \leq \frac{n^2+\overbrace{3}^{\leq 3n^2}}{2n^5-n^5+0} \leq \frac{n^2+3n^2}{n^5} = \frac{4}{n^3} \leq \frac{4}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ ist konvergent, da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium 2.11 ist dann auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{2n^5-n^2+1}$ konvergent, und damit auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{2n^5-n^2+1}$.

ALTERNATIV geht es auch mit der Methode „Ausklammern“:
Es ist

$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\frac{n^2+3}{2n^5-n^2+1}\right| &= \left|\frac{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{n^5\left(2-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5}\right)}\right| \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \underbrace{\left|\frac{1+\frac{3}{n^2}}{2-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5}}\right|}_{\longrightarrow \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{n^3} \cdot 1 = \frac{1}{n^3} \qquad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ist konvergent nach 2.20b). Nach dem Majorantenkriterium 2.11 ist dann auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{2n^5-n^2+1}$ konvergent.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $4^n \geq 0$ und $2^n+3^n>0$ und es gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{4^n}{\underbrace{2^n}_{\leq 3^n}+3^n} \geq \frac{4^n}{3^n+3^n} = \frac{4^n}{2\cdot 3^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^n \geq 0.$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ ist divergent, da die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$ wegen $\frac{4}{3}>1$ divergiert. Nach dem Minorantenkriterium 2.13 ist dann auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{2^n+3^n}$ divergent.

d) Für die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ mit $a_n = \dfrac{(n+1)^{n-1}}{n^n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- Wegen
$$a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- Wegen
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^n \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot (n+1)^{n-1}} = \frac{((n+2)\,n)^n}{(n+1)^{2n}} = \left(\frac{n^2+2\,n}{n^2+2\,n+1}\right)^n \leq 1$$
und damit $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

Damit ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$ nach dem Leibnizkriterium für alternierende Reihen konvergent.

3. a) Es ist mit $a_n := \dfrac{x^{3n}}{n \cdot 8^n},\ n \in \mathbb{N}$
$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{|x^{3n}|}}{\sqrt[n]{n \cdot 8^n}} = \frac{\sqrt[n]{(|x|^3)^n}}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{8^n}} = \frac{|x|^3}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \cdot 8} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|x|^3}{8}.$$

Nach dem Wurzelkriterium 2.21 konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n \cdot 8^n}$ damit (absolut) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{|x|^3}{8} < 1$, also für $|x| < 2$, und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{|x|^3}{8} > 1$, also für $|x| > 2$. Das Konvergenzverhalten für $x = \pm 2$ ist gesondert zu untersuchen:

- Für $x = 2$ ist
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{n \cdot 8^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n \cdot 8^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$
die harmonische Reihe, also divergent.
- Für $x = -2$ ist
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{3n}}{n \cdot 8^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-8)^n}{n \cdot 8^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot 8^n}{n \cdot 8^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$
die alternierende harmonische Reihe, welche nach dem Leibnizkriterium 2.15 konvergiert.

Zusammenfassend ist also die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n \cdot 8^n}$ konvergent für $x \in [-2, 2[$ und divergent für $x \in]-\infty, -2[\cup [2, \infty[$.

b) Für $x = 0$ ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}x^n$ offensichtlich (absolut) konvergent. Sei nun also $x \neq 0$.

Dann ist $a_n := \frac{n^n}{(2n)!}x^n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot|x|^{n+1}}{\frac{n^n}{(2n)!}\cdot|x|^n} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot(2n)!\cdot|x|^{n+1}}{n^n\cdot(2n+2)!\cdot|x|^n} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{(n+1)}{(2n+2)\cdot(2n+1)}\cdot|x| \\
&= \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\cdot(2n+1)}}_{\to 0}\cdot|x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.
\end{aligned}$$

Damit ist nach dem Quotientenkriterium 2.24 die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}x^n$ auch für $x \neq 0$ (absolut) konvergent.

Zusammenfassend ist also die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}x^n$ (absolut) konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

4. Wir verwenden die folgenden einfachen Tatsachen über Primzahlen:

(1) Es gibt unendlich viele Primzahlen $p_1 < p_2 < p_3 < ...$

(2) Es gilt $p_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(3) Es gilt $p_{n+1} - p_n \geq 2$ für alle $n \geq 2$,

wobei (3) aus der Tatsache folgt, daß alle geraden natürlichen Zahlen (außer 2) keine Primzahlen sind.

a) Wegen (1) ist die Folge der Primzahlen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (streng) monoton wachsend und bestimmt divergent gegen ∞; also gilt $\frac{1}{p_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, und $(\frac{1}{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist (streng) monoton fallend. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p_n}$$

nach dem Leibniz-Kriterium 2.15 konvergent.

b) Es ist

$$0 \leq \frac{1}{p_n^2} \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{n^2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ist konvergent (siehe 2.20b)), also ist nach dem Majorantenkriterium 2.11 dann auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n^2}$$

konvergent.

c) Es ist

$$0 \leq \frac{1}{(p_{n+1}-p_n)^n} \overset{(3)}{\leq} \frac{1}{2^n} \qquad \text{für alle } n \geq 2.$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ist konvergent (geometrische Reihe!), also ist nach dem Majorantenkriterium 2.11 dann auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p_{n+1} - p_n)^n}$$

konvergent.