MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 5
19.11.2018

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Das Symbol $\infty - \infty$ darf nicht verwendet werden, und schon gar nicht in der „Rechnung“ $\infty - \infty = 0$. Wenn $x_n \longrightarrow \infty$ und $y_n \longrightarrow \infty$, so gilt zwar $x_n + y_n \longrightarrow \infty$, über das Konvergenzverhalten der Folge $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann aber keine allgemeingültige Aussage getroffen werden, wie die Beispiele in b) zeigen. Es korrekter Beweis zu

$$\sqrt{2^n + n^2} - \sqrt{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

geht z.B. so: Es ist

$$\begin{aligned}
0 \le \sqrt{2^n + n^2} - \sqrt{2^n} &= \sqrt{2^n} \cdot \left(\frac{\sqrt{2^n + n^2}}{\sqrt{2^n}} - 1\right) = \sqrt{2^n} \cdot \left(\sqrt{\frac{2^n + n^2}{2^n}} - 1\right) \\
&= \sqrt{2^n} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{n^2}{2^n}} - 1\right) \overset{(*)}{\le} \sqrt{2^n} \cdot \left(1 + \frac{n^2}{2^n} - 1\right) \\
&= \sqrt{2^n} \cdot \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^2}{\sqrt{2^n}} = \sqrt{\frac{n^4}{2^n}} \underset{n\to\infty}{\overset{(**)}{\longrightarrow}} 0.
\end{aligned}$$

Nach dem Schrankenlemma 1.18 folgt daraus die Behauptung.

Bei $(*)$ haben wir benützt, daß für $x \ge 1$ gilt $\sqrt{x} \le x$, was sofort mittels (1.33) aus der für alle $x \ge 1$ gültigen Ungleichung $x \le x^2$ folgt.
Bei $(**)$ haben wir $\frac{n^4}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, zusammen mit (1.27) (bzw. 1.30a) für $a = 0$) benützt.

b) i. Seien $x_n = 2n$ sowie $y_n = n$ und damit $x_n - y_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \infty$.

ii. Seien $x_n = n$ sowie $y_n = 2n$ und damit $x_n - y_n = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = -\infty$.

iii. Seien $x_n = n + c$ sowie $y_n = n$ und damit $x_n - y_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = c$.

iv. Seien $x_n = n + (-1)^n$ sowie $y_n = n$ und damit $x_n - y_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, und die Folge $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und divergent.

2. a) Sei $K \in \mathbb{R}$.
Weil $x_n \longrightarrow a$, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, also gibt es insbesondere ein $K_1 \in \mathbb{R}$ mit $x_n \ge K_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Weil $y_n \longrightarrow \infty$, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \ge n_0$ gilt $y_n > K - K_1$.
Damit gilt für $n \ge n_0$

$$x_n + y_n \ge K_1 + y_n > K_1 + K - K_1 = K.$$

Damit ist $x_n + y_n \longrightarrow \infty$ gezeigt.

b) Sei $K \in \mathbb{R}$, wir dürfen zum Beweis von $x_n \cdot y_n \longrightarrow \infty$ o.E. $K > 0$ annehmen.
Weil $a > 0$, gibt es $\varepsilon > 0$, so daß $a - \varepsilon > 0$ (z.B. $\varepsilon = \frac{a}{2}$).
Weil $x_n \longrightarrow a$, gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| < \varepsilon$; insbesondere ist für $n \geq n_1$ dann $x_n > a - \varepsilon$.
Weil $y_n \longrightarrow \infty$, gibt es $n_2 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_2$ gilt $y_n > \frac{K}{a-\varepsilon} > 0$.
Setze $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt für $n \geq n_0$

$$x_n \cdot y_n \underset{y_n > 0}{>} (a - \varepsilon) \cdot y_n \underset{a-\varepsilon>0}{>} (a - \varepsilon) \cdot \frac{K}{a - \varepsilon} = K.$$

Damit ist $x_n \cdot y_n \longrightarrow \infty$ gezeigt.

3. Wir halten zunächst $k \in \mathbb{N}$ fest und betrachten die Folge $(c_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen

$$0 < \frac{1}{k} \leq 1 \qquad \text{ist} \qquad 0 \leq 1 - \frac{1}{k} < 1,$$

und damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n = 0, \qquad \text{also} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n\right) = 1,$$

und schließlich

$$\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = \lim_{n\to\infty} k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n\right) = k.$$

Wir halten nun $n \in \mathbb{N}$ fest und betrachten die Folge $(c_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt nach dem Binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n &= \sum_{j=0}^{n} \left[\binom{n}{j} \cdot 1^{n-j} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^j\right] = \sum_{j=0}^{n} \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^j\right] = \\ &= 1 + n \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) + \sum_{j=2}^{n} \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^j\right] = 1 - \frac{n}{k} + \sum_{j=2}^{n} \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^j\right],\end{aligned}$$

also

$$1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n = \frac{n}{k} - \sum_{j=2}^{n} \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^j\right]$$

und damit

$$c_{n,k} = k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n\right) = n - k \cdot \sum_{j=2}^{n} \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^j\right] = n + \sum_{j=2}^{n} \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^{j-1}\right].$$

Wegen

$$\lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{k}\right)^{j-1} = 0$$

für alle $2 \leq j \leq n$ ist

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=2}^{n} \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^{j-1}\right] = 0,$$

insgesamt also

$$\lim_{k\to\infty} c_{n,k} = \lim_{k\to\infty} \left(n + \sum_{j=2}^{n} \left[\binom{n}{j} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right)^{j-1}\right]\right) = n.$$

4. Um die Mengen skizzieren zu können, ist es hilfreich, sich folgende Beziehungen in Erinnerung zu rufen:

$$
\begin{aligned}
&X = K \cup D \\
&K \cap D = \varnothing,\ K \cap BD = \varnothing,\ K \cap M \neq \varnothing,\ K \cap B \neq \varnothing \\
&D \cap BD \neq \varnothing,\ \varnothing \neq D \cap M \subset BD,\ D \cap B \neq \varnothing \\
&BD \cap M \neq \varnothing,\ BD \cap B = \varnothing \\
&\varnothing \neq M \cap B \subset K
\end{aligned}
$$

Skizze: Siehe Beiblatt.