MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 4
12.11.2018

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Damit konvergiert auch die (lediglich um einen Index verschobene) Folge $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Mit Anwendung der Rechenregel 1.23 über konvergente Folgen ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} a_{n+1}\right) = \frac{1}{2}(a+a) = a.$$

[Alternativ läßt sich auch direkt mit Hilfe der Definition argumentieren: da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$; damit folgt für alle $n \geq n_0$

$$|b_n - a| = \left|\frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) - a\right| = \frac{1}{2}\cdot |(a_n + a_{n+1}) - 2\,a| =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot |(a_n - a) + (a_{n+1} - a)| \leq \frac{1}{2}\cdot \big(\underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_{n+1} - a|}_{<\varepsilon}\big) < \varepsilon,$$

und damit konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$.]

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist **nicht** konvergent; die zugehörige Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist jedoch wegen

$$b_n = \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2}\left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right) = \frac{(-1)^n}{2}\,(1 + (-1)) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ die konstante Nullfolge und damit insbesondere konvergent.

c) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung konvergent, insbesondere (nach oben) beschränkt, es gibt also ein $M \in \mathbb{R}$ mit $b_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung monoton wachsend ist, gilt $a_n \leq a_{n+1}$ und folglich

$$M \geq b_n = \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) \geq \frac{1}{2}\,(a_n + a_n) = a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, demnach als monoton wachsende Folge beschränkt und nach Satz 1.25 konvergent.

2. (I.f. meint $\longrightarrow$ stets $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$)

a) Diese Behauptung ist FALSCH! Für z.B.

$$x_n = \frac{1}{2n}, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ist $x_n \neq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_n \longrightarrow 0, y_n \longrightarrow 0$, und nach 1.32 a) und b) aber auch

$$x_n^{y_n} = \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}} \longrightarrow \frac{1}{1 \cdot 1} = 1.$$

b) Diese Behauptung ist RICHTIG! Für z.B.

$$x_n = \frac{1}{2^n}, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ist $x_n \longrightarrow 0, y_n \longrightarrow 0$ und es ist

$$x_n^{y_n} = \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

c) Diese Behauptung ist RICHTIG! Für z.B.

$$x_n = \frac{1}{n^n}, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ist $x_n \longrightarrow 0, y_n \longrightarrow 0$ und es ist

$$x_n^{y_n} = \left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

d) Diese Behauptung ist FALSCH! Da $x_n \longrightarrow 0$ und $y_n \longrightarrow 0$, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt (mit $x_n, y_n > 0$ nach Voraussetzung)

$$0 < x_n < 1 \quad \text{und} \quad 0 < y_n < 1.$$

Dann ist für $n \geq n_0$ mit $y_n = \frac{k_n}{m_n}$ nach (1.33)

$$0 < x_n^{y_n} = \sqrt[m_n]{x_n^{k_n}} \underset{x_n^{k_n} \leq 1^{k_n} = 1}{\leq} \sqrt[m_n]{1} = 1.$$

Also ist $\left(x_n^{y_n}\right)_{n \geq n_0}$ beschränkt, auch damit auch $\left(x_n^{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

e) Diese Behauptung ist RICHTIG! Für z.B.

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{3^n}, & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ist $x_n \longrightarrow 0, y_n \longrightarrow 0$ und es ist

$$x_n^{y_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{3}, & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Damit ist $\left(x_n^{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent.

3. a) Es ist für $n \in \mathbb{N}$

$$0 \le \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+2})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}})$$
$$= \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \le \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Weil $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, gilt nach (1.27) dann auch $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Wir haben also

$$0 \le \sqrt{n+2} - \sqrt{n} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

woraus nach dem Schrankenlemma 1.18 folgt

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

[Alternativer Beweis: Es ist

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = ... = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+2}{n}} + 1} = \frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = 0,$$

unter Verwendung der Rechenregel 1.23 für konvergente Folgen, sowie 1.30.]

b) Wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n - 2^n} = 4$.
Es gilt

$$\sqrt[n]{4^n - 2^n} = \sqrt[n]{4^n\left(1 - \frac{2^n}{4^n}\right)} = \sqrt[n]{4^n} \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{2^n}{4^n}} = 4 \cdot \sqrt[n]{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4 \cdot 1 = 4,$$

wobei noch z.z. ist, daß $\sqrt[n]{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Dies folgt aus dem Schrankenlemma 1.18 wegen

$$1 = \sqrt[n]{1} \ge \sqrt[n]{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \ge \sqrt[n]{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

wobei wir die für alle $n \in \mathbb{N}$ gültige Ungleichung $\frac{1}{2} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^n$, (1.33) und 1.32a) verwendet haben.

[Alternativer Beweis: Man zeigt leicht, daß $2^n \le \frac{1}{2}4^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (!), woraus

$$4^n - 2^n \ge 4^n - \frac{1}{2}4^n = \frac{1}{2}4^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

folgt. Dann folgt mit (1.33) und 1.32a) wegen

$$4 = \sqrt[n]{4^n} \ge \sqrt[n]{4^n - 2^n} \ge \sqrt[n]{\frac{1}{2}4^n} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[n]{4^n} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot 4 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \cdot 4 = 4$$

wie oben aus dem Schrankenlemma 1.18 die Behauptung.]

4. Für die durch

$$x_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = \tfrac{5}{3}, \quad x_4 = \tfrac{11}{5}, \quad x_5 = \tfrac{21}{11}, \quad x_6 = \tfrac{43}{21}, \ldots$$

Sie besitzt daher die Teilfolgen

$$(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0} = (x_1, x_3, x_5, \ldots) = \big(1,\ \tfrac{5}{3},\ \tfrac{21}{11},\ \ldots\big)$$

und

$$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_2, x_4, x_6, \ldots) = \big(3,\ \tfrac{11}{5},\ \tfrac{43}{21},\ \ldots\big)$$

Wir zeigen zunächst $1 \le x_n \le 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $n = 1$ klar, da $x_1 = 1 \in [1, 3]$

Induktionsschluß: „$n \to n+1$": Sei $n \ge 1$ und gelte $x_n \in [1, 3]$; z.z. ist $x_{n+1} \in [1, 3]$.

Es ist $1 \le x_n \le 3$ und damit

$$1 \ge \frac{1}{x_n} \ge \frac{1}{3} \Longrightarrow 2 \ge \frac{2}{x_n} \ge \frac{2}{3} \Longrightarrow 3 \ge 1 + \frac{2}{x_n} \ge 1 + \frac{2}{3} \ge 1 \Longrightarrow 3 \ge x_{n+1} \ge 1.$$

a) Wir zeigen $x_{2k+1} \le x_{2k+3}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $k = 0$ klar, da $x_1 = 1 \le \frac{3}{2} = x_3$

Induktionsschluß: „$k \to k+1$": Sei $k \ge 0$ und gelte $x_{2k+1} \le x_{2k+3}$;
z.z. ist $x_{2k+3} \le x_{2k+5}$.

Es ist

$$x_{2k+1} \le x_{2k+3} \underset{x_{2k+1}>0}{\Longrightarrow} \frac{2}{x_{2k+1}} \ge \frac{2}{x_{2k+3}} \Longrightarrow$$

$$\underbrace{1 + \frac{2}{x_{2k+1}}}_{=x_{2k+2}} \ge \underbrace{1 + \frac{2}{x_{2k+3}}}_{=x_{2k+4}} \Longrightarrow x_{2k+2} \ge x_{2k+4} \underset{x_{2k+4}>0}{\Longrightarrow} \frac{2}{x_{2k+2}} \le \frac{2}{x_{2k+4}}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{1 + \frac{2}{x_{2k+2}}}_{=x_{2k+3}} \le \underbrace{1 + \frac{2}{x_{2k+4}}}_{=x_{2k+5}} \Longrightarrow x_{2k+3} \le x_{2k+5}$$

Damit ist die zunächst Teilfolge $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt also $x_{2k-1} \le x_{2k+1}$, woraus sich

$$\frac{2}{x_{2k-1}} \ge \frac{2}{x_{2k+1}} \quad \text{und damit} \quad x_{2k} = 1 + \frac{2}{x_{2k-1}} \ge 1 + \frac{2}{x_{2k+1}} = x_{2k+2}$$

ergibt; folglich ist dann die Teilfolge $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

b) Die Teilfolge $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist gemäß a) monoton wachsend und gemäß den einleitenden Bemerkungen (durch 1 nach unten und 3 nach oben) beschränkt, also konvergent, und besitzt daher einen Grenzwert $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1}$, für den ebenfalls $1 \le a \le 3$ gilt. Natürlich gilt auch $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+3} = a$. Wegen

$$x_{2k+3} = 1 + \frac{2}{x_{2k+2}} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x_{2k+1}}} = 1 + \frac{2x_{2k+1}}{x_{2k+1} + 2} = \frac{3\,x_{2k+1} + 2}{x_{2k+1} + 2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$a = \lim_{k\to\infty} x_{2k+3} = \lim_{k\to\infty} \frac{3\,x_{2k+1}+2}{x_{2k+1}+2} = \frac{3\,a+2}{a+2}$$

und damit

$$a\,(a+2) = 3\,a+2, \qquad \text{also} \quad a^2 - a - 2 = (a+1)\cdot(a-2) = 0,$$

woraus sich

$$a = -1 \quad \text{oder} \quad a = 2$$

ergibt. Wegen $1 \leq a \leq 3$ ist dann $a = 2$.

Des weiteren ist die Teilfolge $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ gemäß a) monoton fallend und beschränkt, also konvergent, und mit denselben Überlegungen wie eben ergibt sich für den Grenzwert $b = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}$ dann ebenfalls

$$b = 2.$$

Damit konvergiert nach 1.34 auch die gesamte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a = b = 2$.