MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 3
5.11.2018

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Es gilt (Ausklammern der jeweils höchsten Potenz in Zähler und Nenner, Kürzen und Anwendung der Rechenregel 1.23 über konvergente Folgen)

$$x_n = \frac{5n + 3n^2 - 4}{n^2 + 3n + 1} = \frac{n^2 \cdot (\frac{5}{n} + 3 - \frac{4}{n^2})}{n^2 \cdot (1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2})} = \frac{\overbrace{\frac{5}{n}}^{\to 0} + 3 - \overbrace{\frac{4}{n^2}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{3}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{0+3+0}{1+0+0} = 3,$$

damit konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a = 3$.

a) Es ist (Anwendung der Rechenregel 1.23 über konvergente Folgen)

$$x_n = \Big(\underbrace{2 + \frac{3}{n}}_{\longrightarrow 2}\Big)^4 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2^4 = 16;$$

damit konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a = 16$.

c) Die Gaußformel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen lautet (bitte merken!)

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Mit Anwendung der Rechenregel 1.23 über konvergente Folgen ergibt sich dann

$$x_n = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2\,n} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2\,n}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2};$$

damit konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a = \frac{1}{2}$.

d) Die Summenformel für eine geometrische Summe lautet (bitte merken!)

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } q \in \mathbb{R} \text{ mit } q \neq 1.$$

Mit Anwendung der Rechenregel 1.23 über konvergente Folgen, sowie der Tatsache, daß $c^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ im Fall $|c| < 1$, ergibt sich dann

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{7^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{2}{7}\right)^k = \frac{1 - \overbrace{\left(-\frac{2}{7}\right)^{n+1}}^{\to 0,\ \text{da}\ \left|-\frac{2}{7}\right| < 1}}{1 - \left(-\frac{2}{7}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1 - 0}{1 - \left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{1}{\frac{9}{7}} = \frac{7}{9};$$

damit konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a = \frac{7}{9}$.

2. Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1-x^n}{1+x^n} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

mit der folgenden Fallunterscheidung hinsichtlich des Parameters $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- Für $|x| < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1+x^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

- Für $|x| = 1$ ist wegen $x \neq -1$ nur $x = 1$ zu betrachten; wegen

$$a_n = \frac{1-1^n}{1+1^n} = \frac{1-1}{1+1} = 0 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

ist dann also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

- Für $|x| > 1$ können wir

$$a_n = \frac{1-x^n}{1+x^n} = \frac{\frac{1}{x^n}-1}{\frac{1}{x^n}+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ schreiben; wegen

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < 1 \qquad \text{ist} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x^n}-1}{\frac{1}{x^n}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

3. a) In Aufgabe 1 auf Tut-Blatt 2 wurde schon gezeigt

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend
- $a_n \in [1,3]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton und beschränkt, also nach Satz 1.25 konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Weil $a_n \in [1,3]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, ist nach dem Vergleichslemma 1.19 dann auch $a \in [1,3]$. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{und natürlich auch} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$$

Mit Anwendung der Rechenregel 1.23 über konvergente Folgen erhält man dann

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}a_n^2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big)^2 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4},$$

also

$$a = \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4},$$

woraus sich

$$0 = a^2 - 4\,a + 3 \underset{\text{Vieta}}{=} (a-1)\,(a-3)$$

und damit $a = 1$ oder $a = 3$ ergibt; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung hinsichtlich des Startwertes $a_0 \in [1,3]$:

- Für $a_0 \in [1,3[$ gilt, weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend, daß $a_n \le a_0 < 3$, also auch $a \le a_0 < 3$ und damit $a = 1$.
- Für $a_0 = 3$ ist $a_1 = \frac{1}{4}\cdot 3^2 + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$ und analog $a_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $a = 3$.

b) In Aufgabe 1 auf Tut-Blatt 1 wurde schon gezeigt

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend,

so daß wir für die Anwendung von Satz 1.25 nur noch die Beschränktheit der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (nach oben) nachweisen müssen. Wir zeigen:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ ist } \quad a_n \in [0,1]$$

durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = 0$ klar, da $a_0 \in [0,1]$
Induktionsschluß: „$n \to n{+}1$": Sei $n \ge 0$ und gelte $a_n \in [0,1]$; z.z. ist $a_{n+1} \in [0,1]$.

Es ist $a_n \in [0,1]$, also $0 \le a_n \le 1$, woraus $a_n^2 \le a_n$ und damit

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \le a_n - a_n + 1 = 1$$

folgt; aufgrund der Monotonie gilt ferner $0 \le a_n \le a_{n+1}$, woraus insgesamt $a_{n+1} \in [0,1]$ folgt.

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton und beschränkt, also nach Satz 1.25 konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Weil $a_n \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, ist nach dem Vergleichslemma 1.19 dann auch $a \in [0,1]$. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und natürlich auch} \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$$

Mit Anwendung der Rechenregel 1.23 über konvergente Folgen erhält man dann

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n^2 - a_n + 1\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 - \lim_{n\to\infty} a_n + 1 = a^2 - a + 1,$$

folglich

$$0 = \left(a^2 - a + 1\right) - a = a^2 - 2\,a + 1 = (a-1)^2,$$

also $a - 1 = 0$ und damit $a = 1$.
Damit konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen 1.

4. a) Es ist

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \\
x_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
x_3 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \\
x_4 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

b) Beim Übergang von x_n zu x_{n+1} fällt also immer ein Stammbruch weg, dafür kommen zwei neue Stammbrüche dazu. Da

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad \frac{1}{3} > \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \quad u.s.w.$$

vermuten wir, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. In der Tat, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n = & \qquad \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ & -\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \ldots - \frac{1}{2n} \\ & = \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\leq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{\leq \frac{1}{2n}} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0; \end{aligned}$$

damit ist die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend.

c) Offensichtlich ist $0 \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, gilt dann also

$$0 \leq x_n \leq x_1 = \frac{3}{2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Zusammen mit der bereits in b) gezeigten Monotonie folgt nach Satz 1.25, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Den Grenzwert a bekommen wir mit 1.25 jedoch nicht heraus; wir werden erst sehr viel später zeigen können, daß $a = \ln 2$.

d) Die Situation von 1.23 a) ist hier **nicht** gegeben. Zwar gilt 1.23 a) natürlich auch, wenn sich x_n als Summe – statt von 2 – auch von 3,4,... allgemein k Summanden schreiben läßt, entscheidend ist aber, daß die Anzahl k der Summanden fest ist und nicht von n abhängt, wie es in diesem Beispiel der Fall ist:

$$x_n = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n+1 \text{ Summanden}}$$

Auf z.B.

$$y_n = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+k}$$

ließe sich – bei festem $k \in \mathbb{N}$ – also 1.23 a) problemlos anwenden, und es wäre $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; **nicht** aber auf

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n}.$$