MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 2
29.10.2018

# Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Sei $a_0 \in [1,3]$. Wir zeigen die Aussage

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \quad a_n \in [1,3]$$

durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $n = 0$ klar, da $a_0 \in [1,3]$
Induktionsschluß: „$n \to n+1$“: Sei $n \geq 0$ und gelte $a_n \in [1,3]$; z.z. ist $a_{n+1} \in [1,3]$.
Es ist

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \quad \text{da} \quad a_n \leq 3,$$

und,

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \quad \text{da} \quad a_n \geq 1,$$

also insgesamt $a_{n+1} \in [1,3]$.

b) Wir zeigen, daß $a_{n+1} - a_n \leq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}_0$.
Es ist für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{4}a_n^2 - a_n + \frac{3}{4} \;=\; 4\,(a_n^2 - 4\,a_n + 3) \\ &= 4 \cdot (\underbrace{a_n - 1}_{\geq 0}) \cdot (\underbrace{a_n - 3}_{\leq 0}) \;\leq\; 0, \end{aligned}$$

da $1 \leq a_n \leq 3$. Also gilt $a_{n+1} \leq a_n$.

Nun gilt im Fall $a_0 = 1$, daß $1 = a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \dots$ , und im Fall $a_0 = 3$, daß $3 = a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \dots$ . Also ist bei diesen Startwerten die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konstant und damit nicht streng monoton fallend.
Im Fall $a_0 \in ]1,3[$ zeigt man durch vollständige Induktion wie in a), daß dann auch $a_n \in ]1,3[$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit ergibt sich für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{4}a_n^2 - a_n + \frac{3}{4} \;=\; 4\,(a_n^2 - 4\,a_n + 3) \\ &= 4 \cdot (\underbrace{a_n - 1}_{>0}) \cdot (\underbrace{a_n - 3}_{<0}) \;<\; 0, \end{aligned}$$

da $1 < a_n < 3$. Also gilt $a_{n+1} < a_n$und die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist streng monoton fallend.

2. a) Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $n = 2$: Für $n = 2$ erhält man die richtige Gleichung

$$a_2 = \prod_{k=2}^{2} \tfrac{k^2}{k^2-1} = \tfrac{2^2}{2^2-1} = \tfrac{4}{3} = \tfrac{2\cdot 2}{2+1}. \qquad \checkmark$$

Induktionsschluß: „$n \to n+1$“: Sei $n \geq 2$ und gelte $a_n = \frac{2n}{n+1}$;
z.z. ist $a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+2}$.

Es ist

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = \prod_{k=2}^{n+1} \frac{k^2}{k^2-1} &= \underbrace{\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1}\right)}_{a_n} \cdot \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1} \\
&= \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1} = \frac{2n(n+1)}{n^2+2n+1-1} \\
&= \frac{2n(n+1)}{n^2+2n} = \frac{2n(n+1)}{n(n+2)} \\
&= \frac{2(n+1)}{n+2},
\end{aligned}$$

also ist die Induktionsbehauptung gezeigt.

b) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ (möglich aufgrund des Archimedischen Axioms!).
Dann gilt für alle $n \geq n_0$ (unter Verwendung des Ergebnisses aus a))

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n - 2(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon. \quad \checkmark$$

3. Zunächst bemerken wir, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n^3 - n + 1 = n \cdot (\underbrace{n^2-1}_{\geq 0}) + 1 \geq 1 > 0, \tag{1}$$

und für $n \geq 2$ gilt sogar

$$n^3 - n + 1 = n \cdot (\underbrace{n^2-1}_{>0}) + 1 > 1, \quad \text{also} \quad n^3 - n > 0. \tag{2}$$

Ferner verwenden wir im Anschluß, daß für alle $n \geq 2$ gilt

$$n^2 - 1 \geq \frac{1}{2}n^2, \tag{3}$$

denn es ist für $n \in \mathbb{N}$

$$n^2 - 1 \geq \frac{1}{2}n^2 \iff \frac{1}{2}n^2 \geq 1 \iff n^2 \geq 2 \iff n \geq 2.$$

Sei $\varepsilon = 0.001$. Wähle nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $n_0 > \frac{4}{\varepsilon} = 4000$, also z.B. $n_0 = 4001$ (diese Wahl von $n_0$ erschließt sich erst durch die folgende Rechnung).

Dann ist für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
|x_n - 2| &= \left|\frac{2n^3 + (-1)^n \cdot 2}{n^3 - n + 1} - 2\right| = \left|\frac{2n^3 + (-1)^n \cdot 2 - 2n^3 + 2n - 2}{n^3 - n + 1}\right| \\
&= \left|\frac{2n + (-1)^n \cdot 2 - 2}{n^3 - n + 1}\right| = \left|\frac{2(n + (-1)^n - 1)}{n^3 - n + 1}\right| \\
&\underset{n \geq n_0 \geq 2}{\overset{(1)}{=}} \frac{2(n + (-1)^n - 1)}{n^3 - n + 1} \leq \frac{2n}{n^3 - n + 1} \\
&\underset{n \geq n_0 \geq 2}{\overset{(2)}{\leq}} \frac{2n}{n^3 - n} = \frac{2}{n^2 - 1} \\
&\underset{n \geq n_0 \geq 2}{\overset{(3)}{\leq}} \frac{4}{n^2} \leq \frac{4}{n} \leq \frac{4}{n_0} < \varepsilon = 0.001.
\end{aligned}$$

4. a) Student Rainer Wahnsinn hat (unzulässigerweise) die Quantoren $\forall$ und $\exists$ vertauscht. $(*)$ ist auch nicht die Negation von $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, denn diese lautet

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \exists\, n \geq n_0 \quad : \quad |x_n - a| \geq \varepsilon\,.$$

b) zu i): Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leq x_n = 1 + \frac{1}{n} \leq 2,$$

gilt also $|x_n| < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$; die Bedingung $(*)$ ist demnach trivialerweise erfüllt, wir können z.B. $\varepsilon = 3$ und $n = n_0$ wählen. Also konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ nach Student Rainer Wahnsinns Definition gegen 0.

zu ii): Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x_n| = |(-1)^n| = 1 < 2,$$

ist die Bedingung $(*)$ demnach trivialerweise erfüllt, wir können z.B. $\varepsilon = 2$ und $n = n_0$ wählen. Also konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (-1)^n$ nach Student Rainer Wahnsinns Definition gegen 0.

zu iii): Hier ist $(*)$ falsch, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = n$ konvergiert nach Student Rainer Wahnsinns Definition nicht gegen 0, denn:

Annahme: $(*)$ gilt, d.h. es gibt $\varepsilon > 0$, so daß

$$\forall\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \exists\, n \geq n_0 \quad : \quad |x_n| < \varepsilon.$$

Sei $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 > \varepsilon$. Dann existiert demnach ein $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ mit

$$|x_n| = |n| = n < \varepsilon,$$

ein Widerspruch zu $n \geq n_0 > \varepsilon$.

c) Die Aussage in c) ist falsch! Wir betrachten als Gegenbeispiel die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \begin{cases} 0 & , \text{ für } n \text{ ungerade} \\ n & , \text{ für } n \text{ gerade} \end{cases} ,$$

also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, 0, 10, 0, 12, \ldots\big)$. Diese Folge ist nicht beschränkt, aber $(*)$ ist erfüllt für $a = 0$, z.B. mit der Wahl von $\varepsilon = 1$ und $n = n_0$ für ungerades $n_0$ und $n = n_0 + 1$ für gerades $n_0$.