MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 14
4.2.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Bei der Funktion h hat Student Rainer Wahnsinn die Produktregel falsch angewendet. Sie lautet für $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ NICHT $h'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$, sondern korrekt

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Damit ergibt sich damit für $f(x) = x^3$ und $g(x) = \sin x$

$$h'(x) = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x.$$

Bei der Funktion k hat Student Rainer Wahnsinn statt mit „ $\cdot$ “ mit „ $+$ “ nachdifferenziert (schwerer Fehler!). Die Kettenregel lautet für $h(x) = f(g(x))$ NICHT $h'(x) = f'(g(x)) + g'(x)$, sondern korrekt

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Damit ergibt sich damit für $f(x) = \cos x$ und $g(x) = x^4$ korrekt

$$h'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3.$$

b) i) f ist als Summe, Produkt und Komposition differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar (ausführlicher: Die Funktionen $x \longmapsto x, x \longmapsto \sin x$ und $x \longmapsto e^x$ sind differenzierbar, also ist nach 5.8 auch die Komposition $x \longmapsto \sin(e^x)$ differenzierbar und nach 5.7 dann auch $x \longmapsto x^2$ und $x \longmapsto x^2 + \sin(e^x)$)

Mit den Ableitungsregeln 5.7 und 5.8 ergibt sich dann

$$f'(x) = 2x + \cos(e^x) \cdot e^x.$$

ii) f ist als Komposition, Produkt und Summe differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar (ausführlicher: Die Funktionen $x \longmapsto x, x \longmapsto \sqrt{x}, x > 0$, sind differenzierbar, dann auch $x \longmapsto x^2$ und $x \longmapsto x^2 + 1$ und $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ (wegen $x^2 + 1 > 0$), und dann auch $x \longmapsto \underbrace{x^2 + \sqrt{x^2+1}}_{>0}$ und damit schließlich auch $x \longmapsto \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}}$)

Mit den Ableitungsregeln 5.7 und 5.8 ergibt sich dann

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}}} \cdot \Big(2x + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\Big).$$

iii) f ist als Summe, Quotient, Vielfaches und Komposition differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 \;=\; -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

iv) f ist als Quotient, Produkt und Komposition differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{(2\sin x\cos x\cos x + \sin^2 x\cdot(-\sin x))\cdot x^2 - \sin^2 x\cos x\cdot 2x}{x^4}.$$

iv) f ist als Komposition und Summe differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(e^x+1)}\cdot\frac{1}{e^x+1}\cdot e^x.$$

2. a) Die Reihendarstellung von $\sin x$ lautet

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1)!} \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + -... ,$$

also ist für $|x|\le 1$

$$\begin{aligned}
0 \le \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| &= \left| -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - ...\right| \\
&\le \frac{|x|^2}{3!} + \frac{|x|^4}{5!} + \frac{|x|^6}{7!} + \frac{|x|^8}{9!} + ... \\
&= |x|\cdot\Big(\frac{|x|^1}{3!} + \frac{|x|^3}{5!} + \frac{|x|^5}{7!} + \frac{|x|^7}{9!} + ...\Big) \\
&\overset{|x|\le 1}{\le} |x|\cdot\Big(\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} + ...\Big) \\
&\le |x|\cdot\Big(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + ...\Big) \\
&= |x|\cdot e \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{\sin x}{x} - 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{also} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Die Reihendarstellung von $\cos x$ lautet

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{2k)!} \;=\; 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + -... ,$$

also ist für $|x|\le 1$

$$\begin{aligned}
0 \le \left|\frac{\cos x - 1}{x} - 0\right| = \left|\frac{\cos x - 1}{x}\right| &= \left| -\frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \frac{x^7}{8!} - ...\right| \\
&\le \frac{|x|}{2!} + \frac{|x|^3}{4!} + \frac{|x|^5}{6!} + \frac{|x|^7}{8!} + ... \\
&= |x|\cdot\Big(\frac{1}{2!} + \frac{|x|^2}{4!} + \frac{|x|^4}{6!} + \frac{|x|^6}{8!} + ...\Big) \\
&\overset{|x|\le 1}{\le} |x|\cdot\Big(\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} + ...\Big) \\
&\le |x|\cdot\Big(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + ...\Big) \\
&= |x|\cdot e \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{\cos x - 1}{x} - 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{also} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

b) Nach dem Additionstheorem des Sinus (4.16 b) i)) ist für $x, h \in \mathbb{R}$

$$\sin(x+h) = \sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h,$$

also für $h \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} \\
&= \frac{\sin x \big(\cos h - 1\big) + \cos x \cdot \sin h}{h} \\
&= \sin x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \\
&\xrightarrow[h \to 0]{a)} 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x,
\end{aligned}$$

also gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

d.h. sin ist differenzierbar in $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin'(x) = \cos(x)$.

3. a) siehe Skizze!

   b) Für alle $x \in]-1, 1[$ ist nach Definition von f

$$0 \leq f(x) \leq |x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

   also gilt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Damit ist f stetig in $a = 0$.

   c) Die Funktion f ist **nicht** differenzierbar in $a = 0$, da $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nicht existiert! Denn z.B. für die Folge $(x_n)_{n \geq 2}$ mit $x_n = \frac{1}{n}$ gilt $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ und

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

   während z.B. für die Folge $(y_n)_{n \geq 2}$ mit $y_n = -\frac{1}{n}$ gilt $y_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ und

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(y_n)}{y_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1.$$

4. Die Funktion f ist als Quotient differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar (ausführlicher: Die Funktionen $x \longmapsto x$ und $x \longmapsto \sin x$ sind differenzierbar, dann auch $x \longmapsto x^2$ und $x \longmapsto x^2 + 1$ und $x \longmapsto \frac{\sin x}{x^2+1} = f(x)$) mit

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot (x^2+1) - \sin x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\cos x}{x^2+1} - \sin x \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Wegen

$$\lim_{x \to \infty} f'(x) = \lim_{x \to \infty} \Bigg(\underbrace{\cos x}_{\in[-1,1]} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\to 0} - \underbrace{\sin x}_{\in[-1,1]} \cdot \underbrace{\frac{2x}{(x^2+1)^2}}_{\to 0} \Bigg) = 0 - 0 = 0$$

gibt es $b \in \mathbb{R}, b > 0$, mit $f'(b) < \frac{1}{3}$.
Ferner ist $f'(0) = 1 > \frac{1}{3}$. Da f' stetig, ist auch die Einschränkung $f'|_{[0,b]}$ stetig und es gilt $f'|_{[0,b]}(0) = 1 > \frac{1}{3} > f'|_{[0,b]}(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $x_0 \in]0, b[$ mit

$$f'(x_0) = f'|_{[0,b]}(x_0) = \frac{1}{3}.$$

damit hat die Tangente an G_f in $x = \frac{1}{3}$, also beim Punkt $(x_0, f(x_0))$, die Steigung $\frac{1}{3}$.