MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 13
28.1.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Da der Wertebereich von arcsin das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist, ist also $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6}$ wegen $\frac{5\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$ ganz unmöglich. Die Gleichung

$$\arcsin(\sin x) = x$$

gilt **nur** für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Völlig in Übereinstimmung mit der Theorie der Vorlesung gibt der Taschenrechner wegen

$$\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

also den Wert $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ an mit $\sin(x) = \frac{1}{2}$, und das ist eben $x = 0.523598776... = \frac{\pi}{6}$.
Die Gleichung $\sin(x) = \frac{1}{2}$ hat in $[0, 2\pi]$ genau 2 Lösungen; eine davon ist $x = \frac{\pi}{6}$, die andere $x = \frac{5\pi}{6}$ erhält man aufgrund der Tatsache, daß der Graph der Sinusfunktion achsensymmetrisch zur Gerade $x = \frac{\pi}{2}$ ist, was man auch rechnerisch mittels

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

bekommt. **Alle** $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x) = \frac{1}{2}$ sind dann, aufgrund der 2π-Periodizität der Sinusfunktion,

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{und} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Wir bestimmen zuerst alle Lösungen $y \in \mathbb{R}$ der Gleichung

$$\cos y = \frac{1}{2}.$$

Diese Gleichung hat in $[-\pi, \pi]$ genau 2 Lösungen, da $\cos|_{[-\pi,0]}$ streng monoton wachsend mit Wertebereich $[-1, 1]$ und $\cos|_{[0,\pi]}$ streng monoton fallend mit Wertebereich ebenfalls $[-1, 1]$. Damit hat die Gleichung genau eine Lösung in $]0, \pi[$, nämlich $y = \frac{\pi}{3}$ und genau eine Lösung in $]-\pi, 0[$, nämlich $y = -\frac{\pi}{3}$ (wegen $\cos y = \cos(-y)$).
Alle $y \in \mathbb{R}$ mit $\cos(y) = \frac{1}{2}$ sind dann, aufgrund der 2π-Periodizität der Cosinusfunktion,

$$y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{und} \qquad y = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Damit sind **alle** $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(2x + 1) = \frac{1}{2}$ dann $x = \frac{1}{2}(y - 1)$, also

$$x = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{3} + 2k\pi - 1\Big), \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{und} \qquad x = \frac{1}{2}\Big(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi - 1\Big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Sei $D := \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Unter Verwendung der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus (siehe 4.16 b) i), ii) der Vorlesung) gilt für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus D$ mit $x + y \notin D$:

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

$$\underset{x,y \notin D}{=} \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y \left(1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}\right)} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

Damit ist das Additionstheorem des Tangens gezeigt.

3. Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x^3) + \arctan(x) + x^2 - 2$$

ist als Summe und Komposition von Polynomfunktionen, der Exponentialfunktion und des Arcustangens selbst stetig; ferner ist

$$f(0) = \exp(0^3) + \arctan 0 + 0^2 - 2 = 1 + 0 + 0 - 2 = -1 < 0.$$

Wegen

$$f(x) = \underbrace{\exp(x^3)}_{\to 0} + \underbrace{\arctan(x)}_{\to -\frac{\pi}{2}} + \underbrace{x^2}_{\to +\infty} - 2 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) > 0$. Die stetige Funktion $f|_{[a,0]}$ besitzt nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi_1 \in]a, 0[$, es gilt also $f(\xi_1) = 0$.
Wegen

$$f(x) = \underbrace{\exp(x^3)}_{\to +\infty} + \underbrace{\arctan(x)}_{\to \frac{\pi}{2}} + \underbrace{x^2}_{\to +\infty} - 2 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

gibt es ein $b > 0$ mit $f(b) > 0$. Die stetige Funktion $f|_{[0,b]}$ besitzt nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi_2 \in]0, b[$, es gilt also $f(\xi_2) = 0$.
Insgesamt besitzt also f mindestens zwei Nullstellen, nämlich $\xi_1 < 0$ und $\xi_2 > 0$.

4. Für a, $b \in]0, 1[$ ist die Gleichung

$$(*) \qquad a^x + b^x = 1$$

zu betrachten; für alle $x \in]0, \infty[$ gilt

$$a^x + b^x = 1 \iff a^x + b^x - 1 = 0,$$

so daß die Lösungen der Gleichung $(*)$ mit den Nullstellen der Funktion

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x + b^x - 1,$$

übereinstimmen.

Wegen a, $b \in]0, 1[$ fallen die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ und $x \mapsto b^x$ streng monoton; damit ist auch f streng monoton fallend, besitzt also insbesondere **höchstens** eine Nullstelle.

Ferner ist f als Summe zweier Exponentialfunktionen und einer konstanten Funktion stetig, und wegen $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$ gilt

$$f(x) = \underbrace{a^x}_{\to a^0 = 1} + \underbrace{b^x}_{\to b^0 = 1} - 1 \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} 1$$

und

$$f(x) = \underbrace{a^x}_{\to 0} + \underbrace{b^x}_{\to 0} - 1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -1;$$

damit gibt es ein $\alpha < 1$ mit $f(\alpha) > 0$ und ein $\beta > 1$ mit $f(\beta) < 0$. Nach dem Nullstellensatz hat die stetige Funktion $f|_{[\alpha,\beta]}$ dann mindestens eine Nullstelle in $]\alpha, \beta[\subset]0, \infty[$, es gilt also $f(\xi) = 0$ für **mindestens** ein $\xi \in]0, \infty[$.

Damit hat f **genau** eine Nullstelle, so daß die Gleichung $(*)$ eine eindeutig bestimmte Lösung in $]0, \infty[$ besitzt.