MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 12
21.1.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Nur die Rechenregeln

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \text{für } a, b > 0 \qquad \text{und} \qquad \ln(a^b) = b \cdot \ln a \quad \text{für } a > 0, b \in \mathbb{R}$$

sind korrekt.
Die Aussage „$\ln(a + b) = \ln a + \ln b$ für $a, b > 0$“ ist falsch, wie man am Beispiel $a = b = 1$ sieht: Es ist dann nämlich $\ln(a+b) = \ln(1+1) = \ln 2 \neq 0 = \ln 1 + \ln 1 = \ln a + \ln b$.
Ebenfalls falsch ist „$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\ln a}{\ln b}$ für $a, b > 0, b \neq 1$“. Hierzu wähle man z.B. $a = b = 2$ und erhält damit $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{2}{2}\right) = \ln 1 = 0 \neq 1 = \frac{\ln 2}{\ln 2} = \frac{\ln a}{\ln b}$.

   b) Da die Logarithmusfunktion stetig ist, gilt nach Definition, daß für alle $a > 0$ und alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n > 0$ gilt $\left[x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \implies \ln(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln a\right]$.

   i) Es ist $\ln(n + a) = \ln(n \cdot (1 + \frac{a}{n})) = \ln n + \ln(1 + \frac{a}{n})$ und damit

$$\frac{\ln(n+a)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1 + \frac{a}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{\overbrace{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}^{\to \ln 1 = 0}}{\underbrace{\ln n}_{\to\infty}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + 0 = 1.$$

   ii) Es ist

$$\frac{1}{n} \ln n = \ln(n^{\frac{1}{n}}) = \ln(\sqrt[n]{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 1 = 0,$$

da $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ und ln stetig (in 1).

2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist, also

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$$

für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt. Für die in Abhängigkeit von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ a, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ergibt sich für den rechtsseitigen Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ wegen $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0+]{} \infty$, daß

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = \infty;$$

damit ist f, unabhängig von der Wahl von a, an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig.

3. a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Da die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}$$

konvergent sind, konvergiert nach 2.7 auch die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{x^k}{k!} + \frac{(-x)^k}{k!} \Big)$$

und es gilt für die Reihenwerte

$$e^x + e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{x^k}{k!} + \frac{(-x)^k}{k!} \Big),$$

also ist

$$\begin{aligned} \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{x^k}{k!} + \frac{(-x)^k}{k!} \Big) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{x^k}{k!} - \frac{(-x)^k}{k!} \Big) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \end{aligned}$$

b) Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh(x)$$

und

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\sinh(x).$$

c) Es ist

$$\lim_{x \to \infty} \cosh(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to\infty} + \overbrace{e^{-x}}^{\to 0}}{2} = \infty,$$

und wegen b) dann auch $\lim\limits_{x \to -\infty} \cosh(x) = \infty$. Ferner ist

$$\lim_{x \to \infty} \sinh(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to\infty} - \overbrace{e^{-x}}^{\to 0}}{2} = \infty,$$

und wegen b) dann $\lim\limits_{x \to -\infty} \sinh(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \big(\sinh(-x)\big) = -\lim\limits_{x \to \infty} \sinh(x) = -\infty.$

<u>Behauptung:</u> Es gilt $W_{\sinh} = \mathbb{R}$.

„$\subset$“: Trivial!

„$\supset$": Sei $c \in \mathbb{R}$.
Wegen $\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$, gibt es $b \in \mathbb{R}$ mit $\sinh(b) > c$ und
wegen $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$, gibt es $a \in \mathbb{R}, a < b$, mit $\sinh(a) < c$.
Da sinh als Komposition, Summe und Vielfaches stetiger Funktionen stetig ist, ist auch die Einschränkung $\sinh|_{[a,b]}$ stetig, und es gilt $\sinh|_{[a,b]}(a) < c < \sinh|_{[a,b]}(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$\sinh(\xi) = \sinh|_{[a,b]}(\xi) = c.$$

Also ist $c \in W_{\sinh}$.

Behauptung: Es gilt $W_{\cosh} = [1, \infty[$.

„$\subset$": Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist gemäß a)

$$\cosh(x) = 1 + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...}_{\geq 0} \geq 1,$$

also ist $\cosh(x) \in [1, \infty[$.

„$\supset$": Sei $c \in [1, \infty[$.
Wegen $\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \infty$, gibt es $b \in \mathbb{R}, b > 0$, mit $\cosh(b) > c$; außerdem ist $\cosh(0) = \frac{e^0+e^{-0}}{2} = 1$.
Da cosh als Komposition, Summe und Vielfaches stetiger Funktionen stetig ist, ist auch die Einschränkung $\cosh|_{[0,b]}$ stetig, und es gilt $\cosh|_{[0,b]}(0) \leq c < \cosh|_{[0,b]}(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $\xi \in [0, b[$ mit

$$\cosh(\xi) = \cosh|_{[0,b]}(\xi) = c.$$

Also ist $c \in W_{\cosh}$.

4. a) $\log_3(5x + 1)$ ist definiert für alle $x \in] - \frac{1}{5}, \infty[$. Also ist $D =] - \frac{1}{5}, \infty[$. Es gilt für $x \in D$

$$\begin{aligned}
& \log_3(5x+1) = 2 \\
\iff\quad & \frac{\ln(5x+1)}{\ln(3)} = 2 \\
\iff\quad & \ln(5x+1) = 2\ln 3 \\
\iff\quad & e^{\ln(5x+1)} = e^{2\ln 3} \\
\iff\quad & 5x+1 = 3^2 \\
\iff\quad & 5x = 8 \\
\iff\quad & x = \frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

Also ist $L = \{\frac{8}{5}\}$. (Kürzer geht es, wenn man nicht auf den natürlichen Logarithmus umrechnet: Es ist $\log_3(5x + 1) = 2 \iff 3^{\log_3(5x+1)} = 3^2 \iff 5x + 1 = 9 \iff ...$)

b) $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1)$ ist definiert für alle $x \in]1, \infty[\cap] - 1, \infty[$. Also ist $D =]1, \infty[$.

Es gilt für $x \in D$

$$\begin{aligned}
& \log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 1 \\
\iff \quad & \log_2\big((x-1)(x+1)\big) = 1 \\
\iff \quad & \log_2(x^2-1) = 1 \\
\iff \quad & 2^{\log_2(x^2-1)} = 2^1 \\
\iff \quad & x^2 - 1 = 2 \\
\iff \quad & x^2 = 3.
\end{aligned}$$

Also ist $L = \{\sqrt{3}\}$, denn $x = -\sqrt{3} \notin D$.

c) $3^x \cdot 2^x$ und 7^{x-1} sind definiert für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $D = \mathbb{R}$.
Es gilt für $x \in D$

$$\begin{aligned}
& 3^x \cdot 2^x = 7^{x-1} \\
\iff \quad & \ln(3^x \cdot 2^x) = \ln(7^{x-1}) \\
\iff \quad & \ln(3^x) + \ln(2^x) = \ln(7^{x-1}) \\
\iff \quad & x \ln 3 + x \ln 2 = (x-1) \ln 7 \\
\iff \quad & x(\ln 3 + \ln 2 - \ln 7) = -\ln 7 \\
\iff \quad & x = \frac{-\ln 7}{\ln 3 + \ln 2 - \ln 7}.
\end{aligned}$$

Also ist $L = \{\frac{-\ln 7}{\ln 3 + \ln 2 - \ln 7}\}$.

d) 10^x ist definiert für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $D = \mathbb{R}$.
Da $10^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $L = \varnothing$.