MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 11
14.1.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Die Exponentialreihe ist trivialerweise konvergent für $x = 0$. Sei nun $x \neq 0$. Dann ist

$$\left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}}\right| = \left|\frac{x^{k+1} \cdot k!}{x^k \cdot (k+1)!}\right| = \frac{|x|}{k+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Damit ist nach dem Quatientenkriterium die Exponentialreihe für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ konvergent; für $x = 0$ ist sie abenfalls konvergent, also konvergiert sie für alle $x \in \mathbb{R}$.

Es ist

$$e^{2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \cdot x^k}{k!}, \qquad \frac{1}{e^x} = e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{k!},$$

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}.$$

b) Die Argumentation bei der Anwendung des Wurzelkriteriums ist richtig, aber der Beweis von $\sqrt[k]{k!} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ ist falsch. Die Voraussetzung für eine Anwendung des Schrankenlemmas sind hier nicht gegeben; aus

$$0 \leq \sqrt[k]{k!} \leq \sqrt[k]{k^k} = k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

folgt für die Konvergenz der Folge $(\sqrt[k]{k!})_{k\in\mathbb{N}_0}$ gar nichts!

c) Sei n gerade. Dann ist

$$n! = \left(n(n-1)(n-2)\dots(\frac{n}{2}+1)\right)\left(\frac{n}{2}\dots 1\right) \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot 1 \tag{1}$$

Analog gilt für n ungerade (mit $n \geq 3$)

$$n! = \left(n(n-1)(n-2)\dots\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\dots 1\right) \geq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot 1 \tag{2}$$

Sei $a_n = \sqrt[n]{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n \in \mathbb{N}$ gerade ist

$$a_n = \sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

und für $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade ist

$$a_n = \sqrt[n]{n!} \overset{n!\geq 1}{\geq} \sqrt[n+1]{n!} \geq \sqrt[n+1]{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ divergieren also beide gegen ∞. Damit ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bestimmt divergent gegen ∞.

2. Wir erinnern an das ε-δ-Kriterium für stetige Funktionen: Eine Funktion f heißt stetig in $a \in D$, wenn zu *jedem* $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\forall x \in D$ gilt:

$$|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Wir bestimmen also zu jedem $\varepsilon > 0$ jeweils ein $\delta > 0$ mit der geforderten Eigenschaft. Im folgenden sei $\varepsilon > 0$.

a) Wähle $\delta = \varepsilon/2 > 0$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < \delta$

$$|f(x) - f(a)| = |2x - 2a| = 2 \cdot |x-a| \ < \ 2 \cdot \delta = \varepsilon.$$

b) Sei $a = 0$: Wähle $\delta = \varepsilon^2 > 0$. Dann gilt für alle $x \in [0, \infty[$ mit $|x - 0| < \delta$

$$|f(x) - f(0)| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

Sei $a \neq 0$: Es gilt $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ für alle $x \in [0, \infty[$.
Wähle $\delta = \sqrt{a} \cdot \varepsilon > 0$. Dann gilt für alle $x \in [0, \infty[$ mit $|x-a| < \delta$

$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\varepsilon}{\sqrt{a}} \ = \ \varepsilon.$$

3. Die Lösungen der zu betrachtenden Gleichung

$$\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c} = 0$$

entsprechen genau den Nullstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{a,\, b,\, c\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c};$$

diese ist zunächst als gebrochen rationale Funktion stetig. Wegen

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x-a}}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{2}{x-b}}_{\to \frac{2}{a-b}} + \underbrace{\frac{3}{x-c}}_{\to \frac{3}{a-c}} \quad \underset{x \to a+}{\longrightarrow} \quad +\infty$$

gibt es ein $\alpha \in]a, b[$ mit $f(\alpha) > 0$, und wegen

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x-a}}_{\to \frac{1}{b-a}} + \underbrace{\frac{2}{x-b}}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{3}{x-c}}_{\to \frac{3}{b-c}} \quad \underset{x \to b-}{\longrightarrow} \quad -\infty$$

gibt es ein $\beta \in]\alpha, b[$ mit $f(\beta) < 0$; damit existiert aber nach dem Nullstellensatz, angewandt auf die stetige Funktion

$$f|_{[\alpha,\beta]} : [\alpha, \beta] \ \longrightarrow \ \mathbb{R}, \qquad \text{mit} \ \ f(\alpha) > 0 > f(\beta),$$

ein $\xi \in]\alpha, \beta[\subset]a, b[$ mit $f(\xi) = f|_{[\alpha,\beta]}(\xi) = 0$.
Die entsprechende Argumentation liefert dann auch ein $\zeta \in]b, c[$ mit $f(\zeta) = 0$.

4. i) Da f nicht die Nullfunktion ist, gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \neq 0$. Dann ist

$$f(a) = f(a+0) = f(a) \cdot f(0), \qquad \text{also} \quad f(0) = 1.$$

Damit ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) \cdot f(-x),$$

woraus $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt. Zusammen mit

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$$

ist also $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) Aus

$$1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) \cdot f(-x)$$

folgt $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

iii) Aus $f(-y) = \frac{1}{f(y)}$ folgt $f(x-y) = f(x) \cdot f(-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.