MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 10
7.1.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Die Aussagen i) und ii) sind richtig, die Aussage iii) hingegen falsch.

   Beweis zu i):
   Bezeichne
   $$f_1 := f|_{[a,b]} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f_2 := f|_{[c,d]} : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$
   die Einschränkung von f auf $[a,b]$ bzw. $[c,d]$.
   Da f stetig, sind auch f_1 und f_2 stetig. Nach dem Satz von Weierstraß 3.15 a) sind f_1 und f_2 beschränkt, es gibt also $C, D > 0$ mit
   $$\begin{aligned} &|f_1(x)| \le C \quad \text{für alle } x \in [a,b] \\ \text{und} \quad &|f_2(x)| \le D \quad \text{für alle } x \in [c,d]. \end{aligned}$$
   Damit ist
   $$|f(x)| \le \max\{C, D\} \quad \text{für alle } x \in D,$$
   also ist f beschränkt.

   Beweis zu ii):
   Nach dem Satz von Weierstraß 3.15 b), angewandt auf die stetigen Funktionen f_1 und f_2, gibt es $q_1, p_1 \in [a,b]$ und $q_2, p_2 \in [c,d]$ mit
   $$\begin{aligned} &f(q_1) = f_1(q_1) \le f(x) \le f_1(p_1) = f(p_1) \quad \text{für alle } x \in [a,b] \\ \text{und} \quad &f(q_2) = f_2(q_2) \le f(x) \le f_2(p_2) = f(p_2) \quad \text{für alle } x \in [c,d]. \end{aligned}$$
   Sei $q \in \{q_1, q_2\}$ so, daß $f(q) = \min\{f(q_1), f(q_2)\}$
   und $p \in \{p_1, p_2\}$ so, daß $f(p) = \max\{f(p_1), f(p_2)\}$.
   Dann gilt
   $$f(q) \le f(x) \le f(p) \quad \text{für alle } x \in D.$$
   Die Aussage iii) ist i.a. falsch, da D kein Intervall, also nicht mehr „zusammenhängend“ ist:
   Sei z.B. die Funktion f gegeben durch
   $$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & \text{für } x \in [a,b] \\ 1 \ , & \text{für } x \in [c,d] \end{cases} .$$
   Dann ist f stetig, aber
   $$W_f = \{0,1\} \ne [0,1].$$

2. Wir zeigen, daß
   $$W_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

„$\subset$": Sei $x \in D$. Dann ist

$$f(x) = \frac{12x}{x^2+1} + \frac{1}{x} = \frac{12x^2+x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{13x^2+1}{x(x^2+1)} \neq 0,$$

also $f(x) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

„$\supset$": Sei $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

1. Fall: $c > 0$. Wegen

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\overbrace{13x^2+1}^{\to 1}}{\underbrace{x(x^2+1)}_{\to 0,\ x(x^2+1)>0}} = \infty$$

gibt es $a \in]0,\infty[$ mit $f(a) > c$, und wegen

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(13+\frac{1}{x^2})}{x^3(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{13+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}}_{\to 13} = 0$$

gibt es $b \in]0,\infty[,\ b > a$, mit $f(b) < c$.
Da die Funktion $f|_{[a,b]}$ als Einschränkung von f stetig ist mit $f(a) > c > f(b)$, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in]a,b[\subset D$ mit

$$f(\xi) = f|_{[a,b]}(\xi) = c.$$

Also ist $c \in W_f$.

2. Fall: $c < 0$. Wegen

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\overbrace{13x^2+1}^{\to 1}}{\underbrace{x(x^2+1)}_{\to 0,\ x(x^2+1)<0}} = -\infty$$

gibt es $b \in]-\infty,0[$ mit $f(b) < c$, und wegen

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(13+\frac{1}{x^2})}{x^3(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{13+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}}_{\to 13} = 0$$

gibt es $a \in]-\infty,0[,\ a < b$, mit $f(a) > c$.
Da die Funktion $f|_{[a,b]}$ als Einschränkung von f stetig ist mit $f(a) > c > f(b)$, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in]a,b[\subset D$ mit

$$f(\xi) = f|_{[a,b]}(\xi) = c.$$

Also ist auch hier $c \in W_f$.

Damit ist dann $W_f \supset \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Alternativ kann man im 2. Fall ($c < 0$) auch mit der hier gegebenen Punktsymmetrie von f argumentieren:
Wegen

$$f(-x) = \frac{13(-x)^2+1}{(-x)((-x)^2+1)} = -\frac{13x^2+1}{x(x^2+1)} = -f(x) \quad \text{für alle } x \in D,$$

ist f punktsymmetrisch zum Ursprung. Nach dem 1. Fall gibt es zu $-c > 0$ ein $\xi \in D$ mit $f(\xi) = -c$. Dann ist auch $-\xi \in D$ mit

$$f(-\xi) = -f(\xi) = -(-c) = c,$$

also ist $c \in W_f$.

3. Seien $a, b \in]0, \infty[$ mit $a < b$. Dann nimmt die stetige Funktion $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$
   - auf jedem offenem Intervall $D_f =]a, b[$ weder ein globales Maximum, noch ein globales Minimum an.
   - auf jedem halboffenen Intervall $D_f = [a, b[$ ein globales Maximum, nämlich $f(a)$, aber kein globales Minimum an.
   - auf jedem halboffenen Intervall $D_f =]a, b]$ kein globales Maximum, aber ein globales Minimum, nämlich $f(b)$, an.
   - auf jedem geschlossenen Intervall $D_f = [a, b]$ sowohl ein globales Maximum, nämlich $f(a)$, als auch ein globales Minimum, nämlich $f(b)$, an.

4. a) Wir betrachten die Funktion

$$h : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - g(x);$$

damit ist $h = f - g$ als Differenz stetiger Funktionen stetig, und wegen

$$h(a) = f(a) - g(a) < 0 \quad \text{und} \quad h(b) = f(b) - g(b) > 0$$

existiert nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in]a, b[$ mit $h(\xi) = 0$; damit gilt aber $f(\xi) = g(\xi) =: \eta$, und $S = (\xi, \eta)$ ist ein Schnittpunkt der Graphen G_f und G_g.

b) Die Funktionen

$$f : [-1, 1], \quad f(x) = 2\,x + 1, \quad \text{und} \quad g : [-1, 1], \quad g(x) = x^2,$$

sind als Polynomfunktionen insbesondere stetig, und es gilt

$$f(-1) = -1 < 1 = g(-1) \quad \text{sowie} \quad f(1) = 3 > 1 = g(1),$$

nach a) haben die Graphen G_f und G_g also (mindestens) einen Schnittpunkt. Die folgende Äquivalenzkette zeigt die Eindeutigkeit („$\Longrightarrow$“) und gleich nochmal die Existenz („$\Longleftarrow$“)
Für $x \in [-1, 1]$ gilt:

$$f(x) = g(x) \iff 2\,x + 1 = x^2 \iff 2 = x^2 - 2\,x + 1 \iff$$
$$\iff (x-1)^2 = 2 \underset{x-1 \le 0}{\iff} x - 1 = -\sqrt{2} \iff x = 1 - \sqrt{2}$$

Mit $f(1-\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2}$ ist $\left(1-\sqrt{2},\ 3 - 2\sqrt{2}\right)$ der einzige Schnittpunkt der beiden Graphen G_f und G_g.

c) Aus der Stetigkeit der linearen Funktion

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x,$$

und der Polynomfunktion

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = x^4 + 1,$$

sowie der Wurzelfunktion

$$f_3 : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sqrt{x},$$

ergibt sich die Stetigkeit der Komposition

$$f_4 = f_3 \circ f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = f_3(f_2(x)) = \sqrt{x^4 + 1},$$

sowie der Differenzfunktion

$$f = f_1 - f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = f_1(x) - f_4(x) = x - \sqrt{x^4 + 1};$$

des weiteren ist die quadratische Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 - 2,$$

stetig.

- Wegen

$$f(-1) = -1 - \sqrt{2} \ < \ -1 = g(-1) \quad \text{und} \quad f(0) = -1 \ > \ -2 = g(0)$$

  besitzen G_f und G_g gemäß a) in $]-1, 0[$ (mindestens) einen Schnittpunkt.

- Wegen

$$f(1) = 1 - \sqrt{2} \ > \ -1 = g(1) \quad \text{und} \quad f(2) = 2 - \sqrt{17} \ < \ 2 = g(2)$$

  besitzen G_f und G_g analog zu a) in $]1, 2[$ (mindestens) einen Schnittpunkt.

Damit besitzen die beiden Graphen G_f und G_g mindestens zwei Schnittpunkte.