MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Nissen-Meyer

WS 2014/15
Blatt 1
13.10.2014

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + 1 - x_n = x_n^2 - 2x_n + 1 = (x_n - 1)^2 \geq 0,$$

woraus $x_{n+1} \geq x_n$ foglt. Also ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für jede Wahl des Startwerts $x_0 = c$ monoton wachsend.

b) Der folgende Schluß ist i.a. falsch:

$$x_n \leq x_{n+1} \implies x_n^2 \leq x_{n+1}^2$$

(dies wäre korrekt, wenn man $x_n \geq 0$ hätte, wovon man aber nicht ausgehen kann). Ebenfalls falsch ist

$$x_n^2 \leq x_{n+1}^2 \implies x_n^2 - x_n \leq x_{n+1}^2 - x_{n+1}$$

(denn aus $x_n \leq x_{n+1}$ folgt $-x_n \geq -x_{n+1}$, weshalb richtig wäre

$$x_n^2 \leq x_{n+1}^2 \implies x_n^2 - x_{n+1} \leq x_{n+1}^2 - x_n).$$

2. a) Sei $x_0 \in]0,1[$. Wir zeigen die Aussage

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \quad x_n \in]0,1[$$

durch vollständige Induktion:
<u>Induktionsanfang:</u> $n = 0$ klar, da $x_0 \in]0,1[$
<u>Induktionsschluß:</u> „$n \to n+1$“: Sei $n \geq 0$ und gelte $x_n \in]0,1[$; z.z. ist $x_{n+1} \in]0,1[$.
Es ist

$$x_{n+1} = x_n^2 \underbrace{-x_n + 1}_{>0} > x_n^2 > 0$$

und, weil aus $0 < x_n < 1$ stets $0 < x_n^2 < x_n$ folgt, ist auch

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n^2}_{<x_n} - x_n + 1 < x_n - x_n + 1 = 1,$$

also insgesamt $x_{n+1} \in]0,1[$.

b) Für $x_0 > 1$ ist aufgrund der in 1a) bewiesenen Monotonie

$$x_n \geq x_0 > 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für $x_0 < 0$ ist $x_1 = \underbrace{x_0^2}_{>0} \underbrace{-x_0}_{>0} + 1 > 1$, so daß, wieder aufgrund der in 1a) bewiesenen Monotonie,

$$x_n \geq x_1 > 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

c) Es gilt (vgl. Aufgabe 1a)) für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$x_{n+1} - x_n = ... = (x_n - 1)^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \neq 1.$$

Nun ist nach a) und b) aber $x_n \neq 1$ bei allen Startwerten $x_0 \neq 0, 1$, also ist für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sogar streng monoton wachsend.

Für $x_0 = 0$ ist $1 = x_1 = x_2 = x_3 = ...$, und für $x_0 = 1$ ist $1 = x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = ...$, so daß also genau bei den Startwerten $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwar monoton wachsend, jedoch nicht streng monoton wachsend ist.

3. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{b^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{b^n}{n!}} = \frac{b^{n+1} \cdot n!}{b^n \cdot (n+1)!} = \frac{b}{n+1},$$

also

$$x_{n+1} > x_n \quad \text{für} \quad n+1 < b$$

und

$$x_{n+1} < x_n \quad \text{für} \quad n+1 > b.$$

a) Für alle $b > 1$ ist mit $n = 0$ stets $n + 1 = 1 < b$, also gilt stets $x_1 > x_0$, und für $n > b - 1$ ist $x_{n+1} < x_n$. Also ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht monoton.

b) Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl, für die $n_0 \geq b - 1$ gilt. Dann ist (siehe oben)

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{b}{n+1} \leq 1 \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Die Folge $(x_n)_{n\geq n_0}$ ist also monoton fallend.

4. a) Wahr. Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide monoton wachsend, so ist auch $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, denn:

$$\begin{aligned} (x_n)_{n\in N} \text{ monoton wachsend } &\Rightarrow \forall n \in\mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1} \\ (y_n)_{n\in N} \text{ monoton wachsend } &\Rightarrow \forall n \in\mathbb{N} : y_n \leq y_{n+1} \\ &\Longrightarrow x_n + y_n \leq x_{n+1} + y_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

b) Falsch, was folgendes Gegenbeispiel zeigt: Sei

$$x_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\ , \qquad y_n = (-1)^{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $x_n + y_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Folge $(x_n + y_n)_{n\in N}$ monoton. Da aber sowohl $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alternierende Folgen sind, können sie nicht monoton sein.

c) Falsch, was folgendes Gegenbeispiel zeigt: Sei

$$x_n = -1,\ n \in \mathbb{N} \ \ \text{(konstante Folge)}\ , \qquad y_n = n,\ n \in \mathbb{N}.$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beide monoton wachsend, aber weil $x_n \cdot y_n = -n$ für $n \in \mathbb{N}$, ist die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in N}$ streng monoton fallend, also nicht monoton wachsend.