MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 9
17.12.2018

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. a) Student Rainer Wahnsinn präsentiert seinem Tutor folgende Definition von „$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist umkehrbar“, also „f injektiv“:

$$\text{„}\textit{Zu jedem } x \in D \textit{ gibt es genau ein } y \in \mathbb{R} \textit{ mit} \quad f(x) = y,\text{“} \tag{1}$$

die er nach verzweifelden Blicken des Tutors zu

$$\text{„}\textit{Zu jedem } y \in \mathbb{R} \textit{ gibt es genau ein } x \in D \textit{ mit} \quad f(x) = y\text{“} \tag{2}$$

abändert. Der Tutor ist jedoch immer noch nicht zufrieden.
Was hat der Tutor an (1) und (2) zu beanstanden? Welche Eigenschaften werden durch (1) bzw. (2) definiert?
Ändern Sie (2) so ab, daß die korrekte Definition bzw. eine zu „$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist umkehrbar“ äquivalente Aussage dasteht.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich W_f der Funktion

$$f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1},$$

zeigen Sie, daß f umkehrbar ist und geben Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \longrightarrow \mathbb{R}$ explizit an.

2. Bestimmen Sie die folgenden (ggf. auch uneigentlichen) Grenzwerte bzw. zeigen Sie, daß der Grenzwert (auch im uneigentlichen Sinn) nicht existiert:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1 + 2\,x + 3\,x^2}{x^2 + x + 1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - x^3 + 2x - 1}{(x + 1)^3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x - [x])$ (dabei ist $[x] := \max\{z \in \mathbb{Z} \;:\; z \leq x\}$ die Gaußklammer von x)

3. Für die reellen Parameter t, $m \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} t\,x + m, & \text{für } x < -1, \\ x^2 + t\,m\,x + 1, & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ m\,x + t, & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle Paare $(t, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, für die f stetig ist.

4. *(Frühjahr 2016, Thema 2, Aufgabe 2)*
Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2}, & \text{für } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}, \\ \dfrac{4x-6}{x+1}, & \text{für } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Stetigkeitsstellen von f.

Für die Tutorien am 17. und 18.12.18