MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 8
10.12.2018

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. Student Schlau möchte das Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^k$$

mit dem Wurzelkriterium untersuchen und argumentiert so:

Mit $a_k = \left(\frac{k-1}{k}\right)^k, k \in \mathbb{N}$, *ist* $a_k \geq 0$ *und*

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{k}\right)^k} = \frac{k-1}{k} < 1 \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Also ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium konvergent.

Was ist von dieser Argumentation zu halten? Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^k$ tatsächlich konvergent?

2. Bekanntlich gilt (werden wir erst viel später zeigen können)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \;=\; 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \ldots \;=\; \frac{\pi}{4}.$$

Bestimmen Sie (unter Verwendung von 2.16) ein $N \in \mathbb{N}$, so daß gilt

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \,.$$

3. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die gegebenen Reihen konvergent sind:

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$$ b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^{(n^2)}$$

4. Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \;\text{ konvergent } \iff \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{a_k+1} \;\text{ konvergent.}$$

Hinweis zu „$\Longleftarrow$“:
Da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{a_k+1}$ konvergent, gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_0$ gilt $\frac{a_k}{1+a_k} < \frac{1}{2}$ (Warum gilt das?)
Gewinnen Sie hieraus eine Abschätzung für a_k und verwenden Sie das Majorantenkriterium.

Für die Tutorien am 10. und 11.12.18