MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 5
19.11.2018

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. a) Student Rainer Wahnsinn präsentiert dem Tutor stolz seinen „1-Zeilen-Beweis“ von

$$\sqrt{2^n+n^2}-\sqrt{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ :$$

$$„\underbrace{\sqrt{2^n+n^2}}_{\to\infty}-\underbrace{\sqrt{2^n}}_{\to\infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty-\infty = 0.“$$

Der Tutor bekommt daraufhin Magenschmerzen. Warum?
Formulieren Sie einen korrekten Beweis mit dem Tip: „Ausklammern von $\sqrt{2^n}$“.

b) Geben Sie jeweils Beispiele von Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \longrightarrow \infty$ und $y_n \longrightarrow \infty$ an, so daß die Folge $(x_n-y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ...

i. bestimmt divergent gegen ∞ ist.
ii. bestimmt divergent gegen $-\infty$ ist.
iii. gegen eine beliebig vorgegebene reelle Zahl $c\in\mathbb{R}$ konvergiert.
iv. beschränkt und divergent ist.

2. Zeigen Sie für Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anhand der Definition der bestimmten Divergenz:

a) $x_n \longrightarrow a \quad\wedge\quad y_n \longrightarrow \infty \quad\Longrightarrow\quad x_n+y_n \longrightarrow \infty.$

b) $x_n \longrightarrow a>0 \quad\wedge\quad y_n \longrightarrow \infty \quad\Longrightarrow\quad x_n\cdot y_n \longrightarrow \infty.$

3. Für $k,\, n\in\mathbb{N}$ sei

$$c_{n,k} := k\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^n\right).$$

Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = k \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} c_{n,k} = n,$$

d.h. berechnen Sie einerseits den Grenzwert für $n\to\infty$ bei festem $k\in\mathbb{N}$ und andererseits den Grenzwert für $k\to\infty$ bei festem $n\in\mathbb{N}$.

4. Fertigen Sie ein Mengendiagramm an, in das Sie die folgenden Mengen

$$\begin{aligned} K &:= \text{Menge aller konvergenten Folgen}\\ D &:= \text{Menge aller divergenten Folgen}\\ BD &:= \text{Menge aller bestimmt divergenten Folgen}\\ M &:= \text{Menge aller monotonen Folgen}\\ B &:= \text{Menge aller beschränkten Folgen}\end{aligned}$$

als Teilmengen der Menge $X :=$ Menge aller (reellen) Folgen einzeichnen.

Für die Tutorien am 19. und 20.11.18