MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 3
5.11.2018

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. Zeigen Sie, daß die angegebenen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und bestimmen Sie jeweils den Grenzwert.

$$\text{a)}\ \ x_n = \frac{5n+3n^2-4}{n^2+3n+1}\,, \qquad \text{b)}\ \ x_n = \left(2+\frac{3}{n}\right)^4,$$

$$\text{c)}\ \ x_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}\,, \qquad \text{d)}\ \ x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{7^k}$$

2. Untersuchen Sie für $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ die durch

$$a_n = \frac{1-x^n}{1+x^n}\,, \quad n \in \mathbb{N},$$

gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz (unter Verwendung von 1.21, also $c^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, falls $|c|<1$) und ermitteln Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

3. Zeigen Sie, daß die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent sind und bestimmen Sie jeweils den Grenzwert a.

   a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist rekursiv definiert durch Startwert

   $$a_0 \in [1,3] \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{3}{4},\ \ n \geq 0.$$

   (In T.bl. 2/ Aufg. 1 schon gezeigt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend und $a_n \in [1,3]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.)

   b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist rekursiv definiert durch Startwert

   $$a_0 \in [0,1] \quad \text{und} \quad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1,\ \ n \geq 0.$$

   (In T.bl. 1/ Aufg. 1 schon gezeigt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend.)

4. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

   a) Geben Sie (in Summenschreibweise) die ersten 4 Folgenglieder an.

   b) Stellen Sie eine Vermutung über die Monotonie der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf und beweisen Sie diese.

   c) Zeigen Sie, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

d) Student Rainer Wahnsinn glaubt, mit dem folgenden einfachen Argument nicht nur die Konvergenz zeigen zu können, sondern damit auch den Grenzwert herauszubekommen:

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\to 0}.$$

Da jeder Summand gegen 0 konvergiert, folgt nach 1.23 a) (das natürlich nicht nur für 2, sondern auch für mehrere Summanden gilt), daß auch die Summe gegen 0 konvergiert, also

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert 0.

Natürlich bekommt er dafür keine Punkte, der Grenzwert kann auch gar nicht 0 sein, da, wie man leicht zeigt, $x_n \geq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Was hat Student Rainer Wahnsinn falsch gemacht?

Für die Tutorien am 5. und 6.11.18