MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 2
29.10.2018

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch
$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{3}{4},\ n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{mit Startwert} \quad a_0 \in [1,3].$$
   a) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $a_n \in [1,3]$.
   b) Zeigen Sie, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist. Für welche $a_0 \in [1,3]$ ist sie sogar streng monoton fallend?

2. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sei
$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1}.$$
   a) Zeigen Sie für alle $n \geq 2$
$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$
   mit Hilfe vollständiger Induktion.
   b) Finden Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \geq 2$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt
$$|a_n - 2| < \varepsilon.$$

3. Gegeben sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$x_n = \frac{2n^3 + (-1)^n \cdot 2}{n^3 - n + 1}.$$
   Finden Sie ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt
$$|x_n - 2| < 0.001.$$

4. Student Rainer Wahnsinn nimmt es mit den Quantoren nicht so genau und definiert die Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ so:
$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \ \ \exists\, n \geq n_0 \quad : \quad |x_n - a| < \varepsilon\,. \qquad (*)$$
   a) Vergleichen Sie $(*)$ mit der Definition von $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ aus der Vorlesung und erklären Sie, was er anders (falsch) gemacht hat. Ist $(*)$ die Negation von $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$?
   b) Welche der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit x_n aus i) - iii) ist nach der Definition $(*)$ von Student Rainer Wahnsinn konvergent gegen $a = 0$?
$$\text{i)} \quad x_n = 1 + \frac{1}{n}\,, \qquad \text{ii)} \quad x_n = (-1)^n\,, \qquad \text{iii)} \quad x_n = n$$
   c) Ist die folgende Aussage richtig? (Beweis oder Gegenbeispiel!)
$$(*) \text{ ist erfüllt für } a = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt.}$$

Für die Tutorien am 29. und 30.10.18