MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 14
4.2.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. a) Student Rainer Wahnsinn steht vor der Aufgabe, die folgenden Funktionen zu differenzieren:

$$h(x) = x^3 \cdot \sin x \ , \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{und} \qquad k(x) = \cos(x^4) \ , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Er gibt als Ableitungsfunktionen an:

$$h'(x) = 3x^2 \cdot \cos x \ , \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{und} \qquad k'(x) = -\sin(x^4) + 4x^3 \ , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Erklären Sie, welche (schweren) Fehler er gemacht hat und stellen Sie die Ableitungen richtig.

b) Bestimmen Sie jeweils die Ableitungen der folgenden Funktionen

i) $f(x) = x^2 + \sin(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$
ii) $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$
iii) $f(x) = \cot x + \sqrt{2x}$, $x \in]0,\infty[\setminus\{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$
vi) $f(x) = \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
v) $f(x) = \ln(\ln(e^x + 1))$, $x \in \mathbb{R}$.

2. a) Zeigen Sie unter Verwendung der Reihendarstellung von $\sin x$ und $\cos x$, daß

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

b) Bweisen Sie mit Hilfe von a) und dem Addidtionstheorem für den Sinus, daß

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

3. Gegeben sei die Funktion

$$f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \text{ falls } \frac{1}{n} \le |x| < \frac{1}{n-1} \text{ für } n \in \mathbb{N}, n \ge 2 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \end{cases} .$$

a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
b) Entscheiden Sie, ob f stetig in $a = 0$ ist.
c) Entscheiden Sie, ob f differenzierbar in $a = 0$ ist.

4. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x^2+1}.$$

Zeigen Sie, daß es (mindestens) ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so daß die Tangente an den Graphen G_f beim Punkte $(x_0, f(x_0))$ die Steigung $\frac{1}{3}$ hat.

Für die Tutorien am 4. und 5.2.19