MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 11
14.1.2019

# Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. Für $x \in \mathbb{R}$ sei die Exponentialreihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
gegeben.

   a) Zeigen Sie (nochmals) mit dem Quotientenkriterium, daß diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und schreiben Sie $e^{2x}$, $\frac{1}{e^x}$ und $e^{x^2}$ als Reihe.

   b) Student Rainer Wahnsinn möchte die Konvergenz der Exponentialreihe mit dem Wurzelkriterium beweisen, und zwar so:

   *Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist*
$$\sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} = \frac{\sqrt[k]{|x|^k}}{\sqrt[k]{k!}} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k!}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
   *denn wegen*
$$0 \leq \sqrt[k]{k!} \leq \sqrt[k]{k^k} = k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$
   *gilt aufgrund des Schrankenlemmas, daß $\sqrt[k]{k!} \longrightarrow \infty$, also $\frac{|x|}{\sqrt[k]{k!}} \longrightarrow 0$. Da also für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} = 0 < 1$, ist die Exponentialreihe also für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.*

   Was ist Ihr Kommentar zu diesem „Beweis“?

   c) Zeigen Sie (auf korrekte Weise), daß $\sqrt[n]{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

2. Zeigen Sie unter Verwendung des $\varepsilon$–$\delta$-Kriteriums, daß die folgenden Funktionen in jedem Punkt $a \in D$ mit der angegeben Definitionsmenge stetig sind. Geben Sie also zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ jeweils ein $\delta > 0$ an, so daß aus $|x-a| < \delta$ die Ungleichung $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ folgt.

   a) $f(x) = 2x$ , $D = \mathbb{R}$

   b) $f(x) = \sqrt{x}$ , $D = [0, \infty[$

3. Seien $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$. Beweisen Sie, daß die Gleichung
$$\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c} = 0$$
in den Intervallen $]a, b[$ und $]b, c[$ jeweils mindestens eine Lösung besitzt.

4. Eine Funktion, die nicht identisch null ist, erfülle die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

i) Es gilt $f(0) = 1$ und $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Es gilt $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

iii) Es gilt $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

**Für die Tutorien am 14. und 15.1.19**