MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 10
7.1.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. Student Rainer Wahnsinn ist der Meinung, daß die drei Aussagen des Satzes von Weierstraß auch für stetige Funktionen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $D = [a, b] \cup [c, d] \subset \mathbb{R}, b < c$, gelten, also

   i) *f ist beschränkt*

   ii) *Es gibt $p, q \in D$, so daß f in p ein globales Maximum und in q ein globales Minimum hat, also $f(q) \leq f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in D$*

   iii) *Es gilt $W_f = [f(q), f(p)]$.*

   Zeigen Sie, daß zwei dieser Aussagen richtig, eine jedoch (welche?) falsch ist.

2. Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{12x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x},$$

mit $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

3. Geben Sie jeweils *(ohne Beweis)* ein geeignetes Intervall als Definitionsmenge $D_f \subset]0, \infty[$ für die Funktionsvorschrift $f(x) = \frac{1}{x}$ an, so daß

   - f auf D_f weder ein globales Maximum, noch ein globales Minimum besitzt.
   - f auf D_f ein globales Maximum, aber kein globales Minimum besitzt.
   - f auf D_f kein globales Maximum, aber ein globales Minimum besitzt.
   - f auf D_f sowohl ein globales Maximum, also auch ein globales Minimum besitzt.

4. Seien $f,\, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$.

   a) Zeigen Sie, daß die beiden Graphen G_f und G_g mindestens einen Schnittpunkt besitzen.

   b) Geben Sie für $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\,x + 1$, und $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, einen Schnittpunkt von G_f und G_g explizit an.

   c) Zeigen Sie, daß die Graphen der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^4 + 1}$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2$, mindestens zwei Schnittpunkte besitzen.

Für die Tutorien am 7. und 8.1.19