MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 1
22.10.2018

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I (Unterrichtsfach)“

1. Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_0 = c, \quad x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

   a) Zeigen Sie durch Betrachtung der Differenz $x_{n+1} - x_n$, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für jede Wahl von $c \in \mathbb{R}$ monoton wachsend ist.

   b) Student Rainer Wahnsinn möcht a) unbedingt mit vollständiger Induktion beweisen. Den Induktionsanfang für $n = 0$ kriegt er zwar nicht hin, hofft aber, auf den folgenden Induktionsschluß noch Punkte zu bekommen:

   <u>Induktionsschluß:</u> „$n \to n+1$“: Sei $n \geq 0$ und gelte $x_n \leq x_{n+1}$.
   z.z. ist $x_{n+1} \leq x_{n+2}$.
   Aus $x_n \leq x_{n+1}$ folgt sofort $x_n^2 \leq x_{n+1}^2$, woraus sich, wieder wegen $x_n \leq x_{n+1}$, die Aussage

$$x_n^2 - x_n \leq x_{n+1}^2 - x_{n+1}$$

   ergibt. Addition von 1 auf beiden Seiten liefert die Induktionsbehauptung:

$$x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1 \ \leq \ x_{n+1}^2 - x_{n+1} + 1 = x_{n+2}. \qquad \square$$

   Für diese Ausführungen gibt es jedoch vom Korrektor keine Punkte. Erklären Sie Student Rainer Wahnsinn, warum, und was er alles falsch gemacht hat!

2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wie in Aufgabe 1.

   a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, daß für alle Startwerte $x_0 \in]0,1[$ gilt

$$x_n \in]0,1[\quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

   b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1a), daß für alle Startwerte $x_0 \notin [0,1]$ gilt

$$x_n > 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

   c) Für welche Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sogar streng monoton wachsend?

3. Sei $b \in \mathbb{R}, b > 1$, und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch

$$x_n = \frac{b^n}{n!}.$$

   a) Zeigen Sie, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht monoton ist.

   b) Bestimmen Sie das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß die Folge $(x_n)_{n\geq n_0}$ monoton fallend ist.

4. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen. Zeigen oder widerlegen Sie:

   a) Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide monoton wachsend, so ist auch $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

   b) Ist $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton.

   c) Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide monoton wachsend, so ist auch $(x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Für die Tutorien am 22. und 23.10.18