Mathematische Statistik 2, Übungen, Blatt 9

---

33. (*Histogramm-Schätzer für Dichten*)

Für den Histogramm-Schätzer einer Dichte $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, das ist

$$\hat{f}_n(x) \;=\; \frac{1}{n\,h} \sum_{i=1}^{n} 1_{I(x)}(X_i) \qquad [I(x) = I_j,\ \text{falls } x \in I_j,\ \text{alle } |I_j| = h, j \in \mathbb{Z}]$$

vgl. VIII 1.4, zeige man, mit $p_h(x) \equiv \int_{I(x)} f(t)\,dt$,

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_n(x)\,dx \;=\; 1$ **b)** $\mathbb{E}\big(\hat{f}_n(x)\big) \;=\; \frac{1}{h}\, p_h(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(x)$ [f.s.]

c) $\mathrm{Var}\big(\hat{f}_n(x)\big) \;=\; \frac{1}{n\,h^2}\, p_h(x) \cdot (1 - p_h(x))$.

34. (*Fortsetzung von Aufgabe 33: Asymptotische Eigenschaften*)

Sei zusätzlich f stetig [in c) sogar $2 \times$ stetig differenzierbar] und es gelte $h \to 0$, $n \cdot h \to \infty$ bei $n \to \infty$. Man zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung

a) $\hat{f}_n(x)$ ist asymptotisch erwartungstreu für $f(x)$.

b) $\mathrm{Var}\,\big(\hat{f}_n(x)\big) \;=\; \frac{1}{n\,h}\, f(x) + o\big(\frac{1}{n\,h}\big)$

c) $\mathrm{Bias}(x) \;\equiv\; \mathbb{E}\big(\hat{f}_n(x)\big) \;-\; f(x) \;=\; \frac{1}{24}\, h^2\, f''(x) + o(h^2)$

[x sei hier der Mittelpunkt von $I(x)$; Taylorentwicklung bis zur Ordnung 2]

35. (*Stochastischer Regressor X, allgemeine Regressionsfunktion*)

Für die Zufallsvariablen X und Y aus L_2 definiere die (allgemeine) Regressionsfunktion m durch

$$m(x) \;=\; \mathbb{E}(Y|X = x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es bezeichne L_2^X die Menge aller (messbaren) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(X) \in L_2$. Setze ferner

$$I(f) \;=\; \mathbb{E}\big(Y - f(X)\big)^2\,, \quad f \in L_2^X\,.$$

a) Man zeige $m \in L_2^X$

b) Man vergleiche $\mathbb{E}(m(X))$ mit $\mathbb{E}(Y)$ und $\mathrm{Var}(m(X))$ mit $\mathrm{Var}(Y)$.

c) Man zeige $I(m) \;=\; min_{f \in L_2^X}\, I(f)$ [Eindeutigkeit?].

Hinweis zu a,b: Jensensche Ungleichung für bedingte Erwartungen benutzen.

36. (*Beispiel AR(1)-Prozess mit Mittelwertkorrektur, Prognosefunktion*)

Gegeben den AR(1)-Prozess mit Mittelwertkorrektur aus VII 3.4, das ist

$$Y_t \;=\; \nu \;+\; \alpha \cdot Y_{t-1} \;+\; e_t\,, \quad t \in \mathbb{N},\ \nu = \mu\,(1-\alpha),\ |\alpha| < 1.$$

a) Man bestimme die Regressions-(Prognose-)Funktion $m(x)$ aus Aufg. 35 in den Fällen

$(X,Y) = (Y_t, Y_{t+1})$, $(X,Y) = (Y_t, Y_{t+2})$, allg.: $(X,Y) = (Y_t, Y_{t+l})$, $l \in \mathbb{N}$ (*time lead*).

b) Bestimme den Limes der Funktion $m(x) \equiv m_l(x)$ für $l \to \infty$ und deute das Ergebnis.

Abgabe: Mittwoch, 9. Juli, 2008, 12:10 Uhr, Übungskasten 1.Stock
Besprechung: Donnerstag, 10. Juli, 14:15 - 15:45 Uhr, B047
Hinweis: Die Klausur am Do., 17.Juli, findet statt. Zeit nach Vereinbarung.