

Alle reden vom Klima – wir analysieren es

Helmut Pruscha

Mathematisches Institut der LMU München

April 2006

1 Klima-Daten

Station: Auf dem zwischen Weilheim und Schongau (Bav.) gelegenen Hohen Peißenberg (989 m ü. M.) befindet sich ein Pfarrhaus, das seit 1781 der Ort von Wetteraufzeichnungen ist. Im Jahre 1940 zog diese Bergwetterstation in das neugebaute Observatorium um.

Daten-Quelle: Deutscher Wetterdienst, Offenbach/m, Klimadaten ausgewählter deutscher Stationen: www.dwd.de/de/.

Ferner: Grebe (1957), Attmannspacher (1981), Fricke (DWD, Korrekturmitteilungen)

1.1 Temperaturreihe Hohenpeißenberg 1781–2005

Wir haben die Originaldaten von Attmannspacher (Tab. A 3.1) übernommen. Ausnahmen bilden die Jahre 1811, 1812 (Aufzeichnungslücke) und 1879–1900 (geänderter Ablesemodus). Hier haben wir auf die homogenisierten Werte von Grebe zurückgegriffen. Ferner: Korrekturmitteilungen von Fricke, DWD.

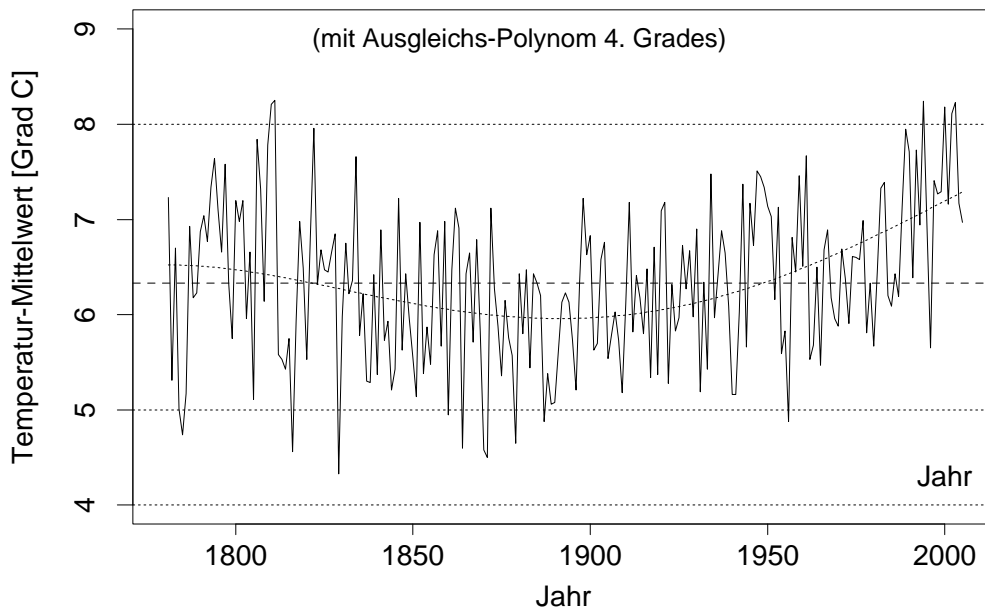
Der Dezemberwert des Vorjahres (dzvj) ist zu Beginn jedes Jahres nochmals aufgeführt.

Mittlere Monats-[Jahres-] Temperaturen in $1/10\text{ }^{\circ}\text{C}$ [$1/100\text{ }^{\circ}\text{C}$]. Einen Zeitreihenplot der Jahresmittel und der Wintermittel bringt Abb. 1.

Jahr	dzvj	jan	feb	mar	apr	mai	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dez	Tjahr	
1781	-18	-18	-10	24	87	122	145	154	166	126	44	15	12	723	
1782	12	-10	-54	0	38	94	156	176	144	108	36	-28	-23	531	
1783	-23	7	3	-4	64	108	131	163	144	118	82	12	-24	670	
1784	-24	-53	-46	0	21	128	132	152	136	143	23	12	-47	501	
1785	-47	6	-65	-60	13	91	117	131	131	141	60	23	-19	474	
1786	-19	-1	-30	-5	71	91	139	118	123	94	35	-5	-10	517	
1787	-10	-35	8	33	38	72	141	143	161	120	93	18	39	693	
1788	39	-19	21	23	56	116	148	176	140	135	56	-6	-105	618	
1789	-105	-10	-5	-34	74	131	110	147	144	110	65	4	12	623	
1790	12	-6	9	16	38	120	144	135	157	109	85	28	-11	687	
1791	-11	9	-18	20	89	97	130	148	164	110	72	14	10	704	
1792	10	-9	-20	37	78	91	138	154	158	98	81	21	-15	677	
1793	-15	-34	9	26	44	88	126	181	175	114	101	41	10	734	
1794	10	-16	30	59	101	108	142	184	140	95	64	35	-25	764	
.....														
1990	25	17	51	55	37	120	124	151	165	104	100	18	-17	771	
1991	-17	-14	-27	50	42	61	119	168	166	141	58	25	-22	639	
1992	-22	-4	9	28	53	125	136	164	191	124	51	49	1	773	
1993	1	22	-18	14	81	125	138	139	150	112	61	-9	18	694	
1994	18	5	1	61	46	106	145	189	170	117	75	62	12	824	
1995	12	-20	30	5	61	104	111	181	146	98	113	20	-18	692	
1996	-18	-16	-32	-12	61	98	141	140	139	80	73	27	-21	565	
1997	-21	-10	27	45	37	110	128	139	170	133	62	37	11	741	
1998	11	5	34	18	64	115	149	152	161	109	73	-10	2	727	
1999	2	20	-32	36	60	122	125	161	155	146	78	5	-1	729	
2000	-1	-20	19	25	83	126	157	129	172	126	86	46	33	818	
2001	33	-0	8	43	43	131	123	163	170	87	128	0	-37	716	
2002	-37	7	32	48	56	113	167	155	154	99	76	54	12	811	
2003	12	-23	-38	48	63	127	193	172	207	125	43	58	13	823	
2004	13	-21	2	19	71	90	134	153	164	126	102	16	4	717	
2005	4	-9	-39	23	70	113	154	157	134	132	106	23	-28	697	
2006	-28	-23	-25												
		-----						-----							
		Winter						Sommer							

Winter-Daten, berechnet gemäß $(dzvj + jan + feb)/(10 \cdot 3)$, und Sommer-Daten, berechnet gemäß $(jun + jul + aug)/(10 \cdot 3)$, sind auszugsweise im ANHANG 1 wiedergegeben.

Hohenpeissenberg, Temperatur Jahr 1781-2005



Hohenpeissenberg, Temperatur Winter 1781-2005

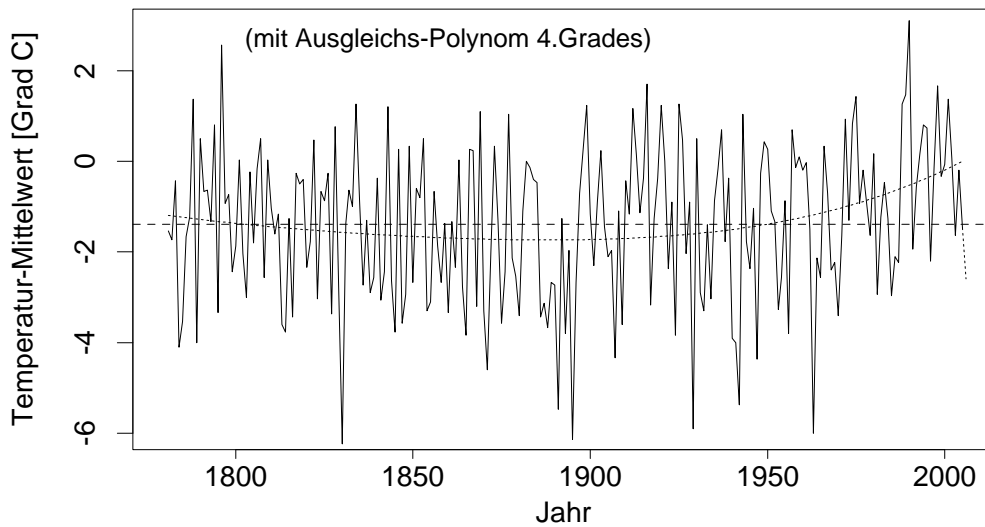


Abbildung 1: Temperatur-Mittelwerte Jahr bzw. Winter [$^{\circ}C$] Hohenpeissenberg, 1781–2005, mit Ausgleichspolynom vierten Grades (\cdots) und mit dem Mittelwert 6.33 bzw. $-1.39^{\circ}C$ über alle 225 Jahre bzw. Winter ($- -$). Der Wert des Winters 2006 ist gestrichelt angefügt

1.2 Niederschlagsreihe Hohenpeißenberg 1879–2005

Wir haben die Originaldaten von Attmannspacher (Tab. A 3.51) übernommen.

Niederschlagshöhen in 1/10 mm. Einen Zeitreihenplot der Jahressummen und der Wintersummen bringt Abb. 2.

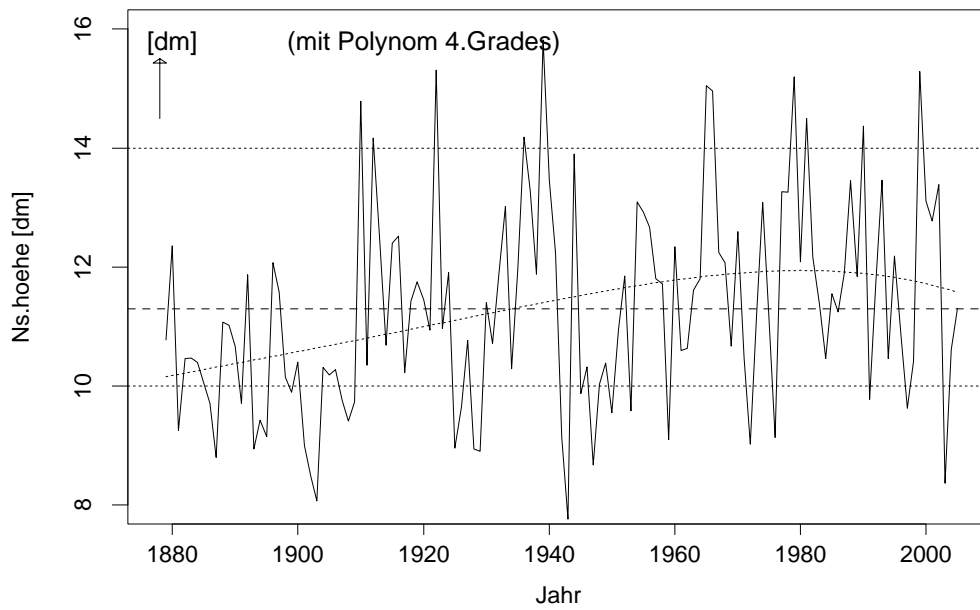
Jahr	dzvj	jan	feb	mae	apr	mai	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dez	Njahr
1879	578	254	619	272	1071	1039	1009	1473	1457	1645	685	861	393	10778
1880	393	385	253	315	967	1203	1991	1870	1212	997	1784	473	907	12357
1881	907	188	232	448	809	1332	1404	885	1490	1173	828	263	202	9254
1882	202	186	88	400	696	952	1565	1802	1314	1275	788	896	501	10463
1883	501	310	127	421	504	1179	2096	2020	835	1152	526	614	684	10468
1884	684	649	202	412	1164	440	1846	1957	1130	534	1360	268	432	10394
1885	432	100	277	643	285	1185	1437	1644	925	1366	761	462	968	10053
1886	968	244	171	436	828	625	2214	972	2288	382	430	436	682	9708
1887	682	145	125	888	291	1712	435	1550	718	699	647	637	952	8799
1888	952	431	667	494	1438	690	1575	1288	1733	1887	607	211	55	11076
1889	55	174	1084	502	701	1151	1738	1408	1019	1610	678	696	260	11021
1890	260	344	137	327	718	698	1426	2045	2265	1251	708	639	107	10665
1891	107	549	142	706	807	1217	741	1947	1111	1032	373	463	619	9707
1892	619	802	628	342	1236	851	1855	1886	624	1982	1091	297	278	11872
...														...
1991	509	482	176	519	766	1503	1984	1216	599	861	328	694	651	9779
1992	651	88	707	1228	821	166	1557	1605	1371	713	961	1993	531	11741
1993	531	618	275	493	583	1376	1587	3465	2168	1032	767	376	719	13459
1994	719	688	328	862	1104	1073	783	1419	1201	938	497	733	836	10462
1995	836	450	526	713	1035	1070	2173	1169	2133	568	385	1059	905	12186
1996	905	138	314	588	597	1353	1018	1532	1849	1018	1082	920	417	10826
1997	417	18	585	673	934	425	1724	2404	457	319	947	189	956	9631
1998	956	398	280	1012	474	569	1389	1174	666	1632	1496	923	404	10417
1999	404	598	1187	474	927	3507	1625	1560	1194	1357	423	1341	1097	15290
2000	1097	300	802	1514	549	1537	1422	1743	2006	1413	997	551	275	13109
2001	275	681	664	1162	1107	628	2183	967	1626	1621	345	1018	773	12775
2002	773	103	685	992	723	952	1541	1509	1908	2203	821	1342	606	13385
2003	606	670	513	327	265	817	800	1504	815	450	1352	485	371	8369
2004	371	1127	431	677	547	1009	1573	1712	857	944	769	509	455	10610
2005	455	551	740	431	1191	1310	693	1840	2522	593	454	432	547	11304
2006	547	400	395											

Winter

Sommer

Winter- und Sommer-Daten [das sind die Summen dzvj+jan+feb bzw. jun+jul+aug] finden sich auszugsweise im ANHANG 1.

Hohenpeissenberg, Niederschl Jahr 1879-2005



Hohenpeissenberg, Niederschl. Winter 1879-2005

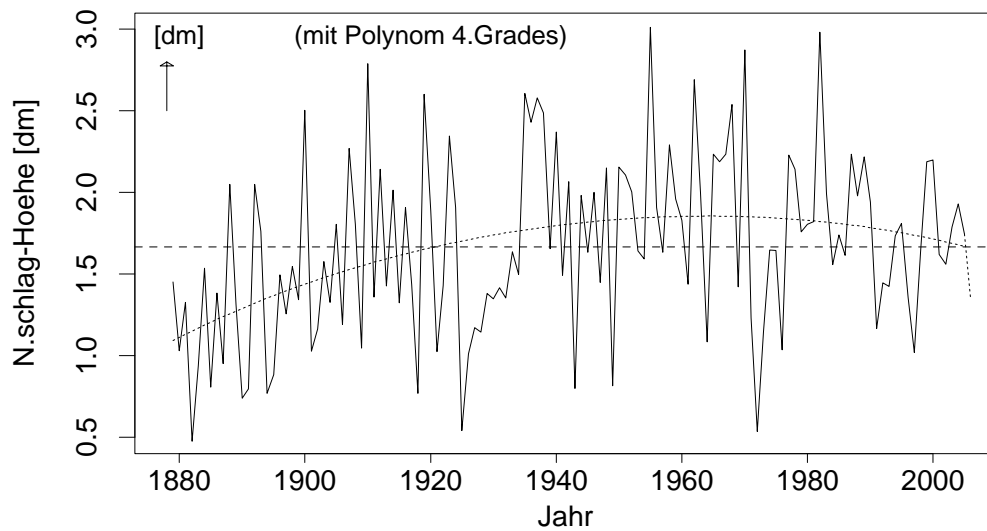


Abbildung 2: Niederschlagshöhen Jahr bzw. Winter [dm] Hohenpeissenberg, 1781–2005, mit Ausgleichspolynom vierten Grades (\cdots) und mit dem Mittelwert 11.30 bzw. 1.67 [dm] über alle 127 Jahre bzw. Winter (- - -). Der Wert des Winters 2006 ist gestrichelt angefügt.

2 Temperatur-Trends

In diesem Abschnitt studieren wir den langfristigen Trend der Temperaturwerte.

2.1 Vergleich der beiden Jahrhunderte

Während des 19ten Jahrhunderts fallen die mittleren Jahrestemperaturen ab, im 20ten Jahrhundert dagegen steigen sie wieder an, vgl. Abb 3.

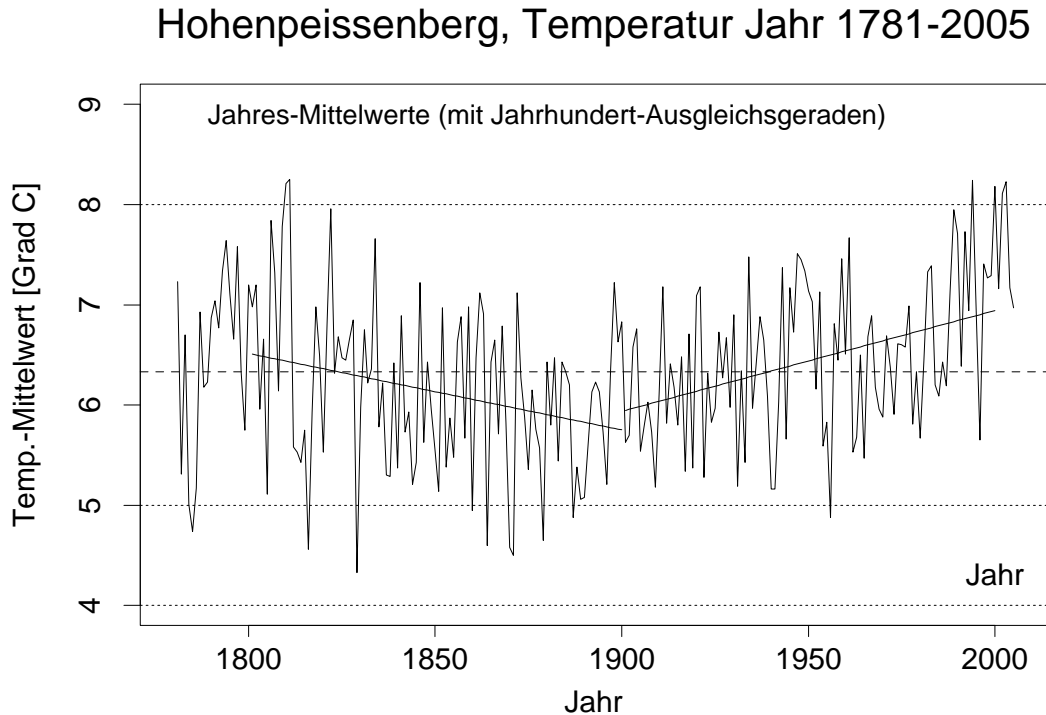


Abbildung 3: Mittlere Jahrestemperaturen [$^{\circ}C$] Hohenpeißenberg, 1781–2005, mit Ausgleichsgeraden pro Jahrhundert. Vgl. auch Schönwiese *et al*, 1993.

Die zu den Regressionskoeffizienten (Steigungen) gehörenden Korrelationskoeffizienten r der beiden –getrennt berechneten– Ausgleichsgeraden sind jeweils signifikant von Null verschieden (siehe nachfolgende Tabelle). Das bedeutet, dass der negative Trend im 19ten Jhd und der positive Trend im 20ten Jhd als statistisch signifikant nachgewiesen sind.

Jahrhdt	Korrel.koeff $r_{Jahr, Tp}$	Standardfehler $\approx 1/\sqrt{n}$	Schranke für $ r $ (H_0 : Korr=0, $\alpha = 0.01$)
19tes	- 0.262	0.100	0.258
20tes	0.390	0.100	0.258

Statistische Ergebnisse sind rein formale Aussagen. Nur der Klimatologe kann substanzwissenschaftliche Aussagen (wie allgemeine Erderwärmung etc.) treffen. Vor zu schnellen Verallgemeinerungen warnt auch der Blick auf die Temperaturschwankungen der letzten Jahrtausende.

2.2 Historische Temperaturschwankungen

Der Verlauf der (geschätzten) mittleren Jahrestemperatur über die Jahrtausende mahnt zur Vorsicht. Die Abbildung 4 zeigt die Temperaturschwankungen der letzten acht Jahrtausende nach Schönwiese (1979); vgl. auch Glaser (2001). Die Schätzungen erfolgten nach der Sauerstoff-Isotopenmethode aus Grönländischen Eisbohrkernen.

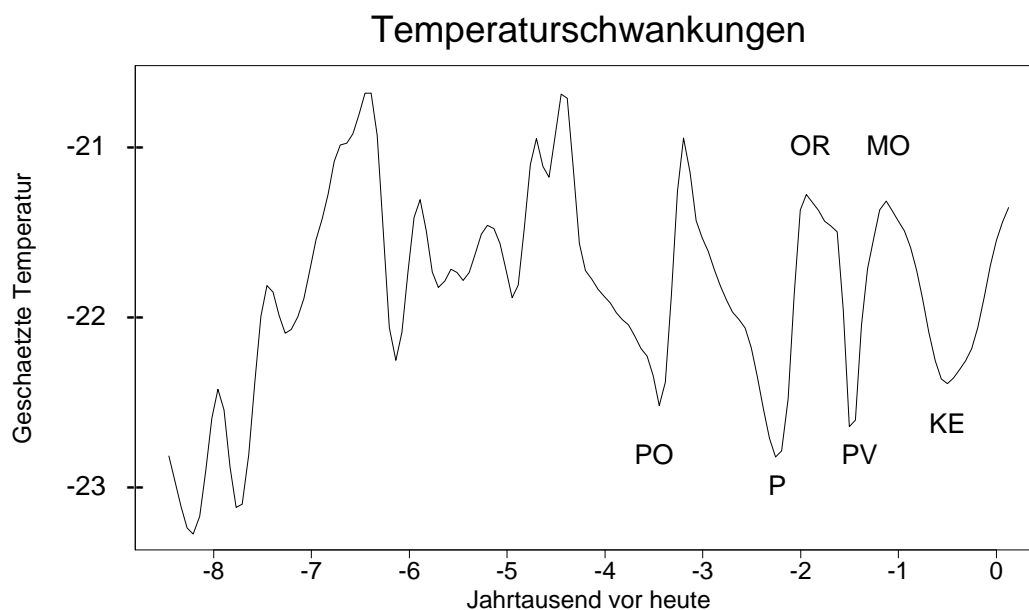


Abbildung 4: Temperaturschwankungen der letzten achttausend Jahre, qualitativer Verlauf; nach Schönwiese, 1979, Abb. 29

- KE: Kleine Eiszeit (1500 – 1700),
- MO: Mittelalterliches Optimum (800 – 1000),
- PV: Pessimum der Völkerwanderungszeit (450 – 800),
- OR: Optimum der Römerzeit (200 v. – 200 n.),
- P: Hauptpessimum (1200 v. – 600 v.).

3 Monatswerte

Der Verlauf der Temperatur über die 12 Monate des Jahres wird durch die Angabe der –über die Beobachtungsperiode gemittelten– 12 Monatsmittel angegeben. Nach Malberg (1997) entspricht der (unten rechts wiedergegebene) Jahresgang der Niederschlagssummen mehr einem kontinentalen und weniger einem ozeanischen Klimatyp. Die Abb. 5 präsentiert die 48 mittleren Monatstemperaturen aus vier Jahren. Um den Temperaturmittelwert eines bestimmten Monats zu beurteilen, wird er verglichen mit demjenigen Wert, der durch die Trend- und Saison-Komponente bestimmt wird.

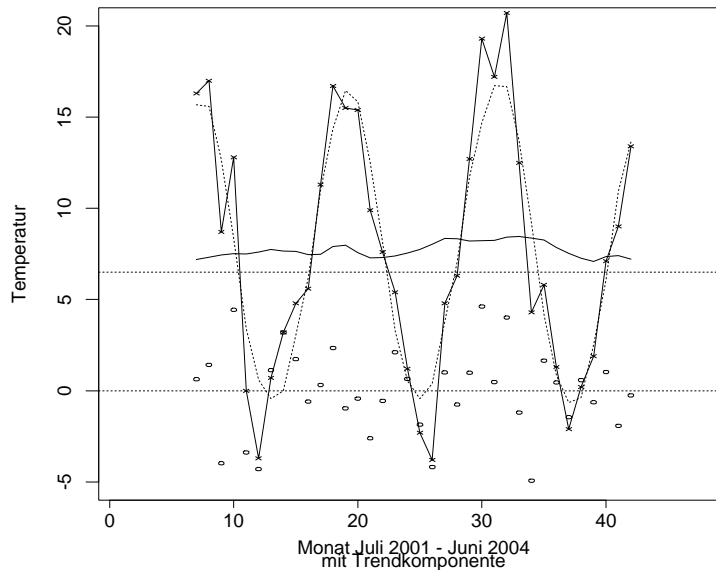
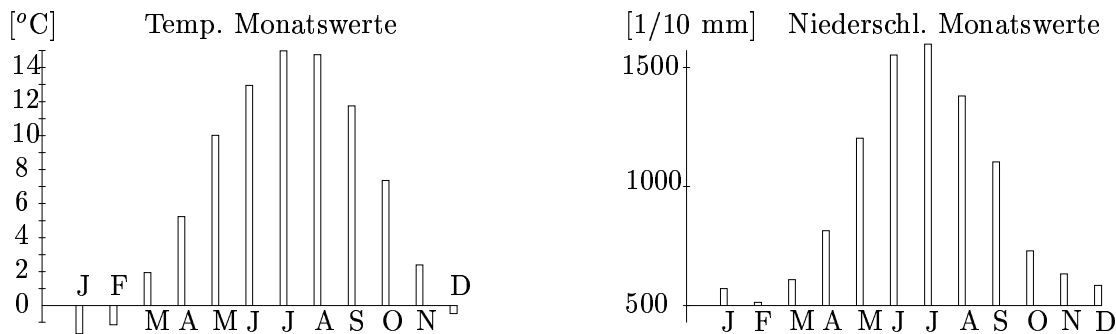


Abbildung 5: Die mittleren Monatstemperaturen Y_t (\times) über vier Jahre, 2001–2004. Zusätzlich mit Trendkomponente (—) und Trend- + Saisonkomponente (\cdots), sowie den Residuen davon (o).

Die Trendkomponente \hat{m}_t ist mittels gleitender Durchschnitte über 13 Monate ermittelt. Die Saisonkomponente \hat{s}_t besteht aus den –auf Mittelwert Null zentrierten– Monatswerten aus dem Diagramm oben links. Die Trend- + Saisonkomponente ist dann $\hat{Y}_t = \hat{m}_t + \hat{s}_t$. Die Residuen $Y_t - \hat{Y}_t$ zeigen an, in welchen Monaten die Trend- und Saison-bereinigten Temperaturen zu hoch oder zu niedrig waren.

Der „Rekordsommer“ 2003 sticht mit überdurchschnittlich hohen Temperaturwerten im Juni und August ins Auge. Entsprechend sind die Residuenwerte deutlich positiv. Überdurchschnittlich kalt waren September, November und Dezember 2001, sowie ganz besonders der Oktober 2003 (Letzterer mit extrem negativem Residuum).

4 Korrelationen: Jahr, Jahreszeit, Monat, Tag

Wie stark ist ein Messwert zum Zeitpunkt t (genannt: x) korreliert mit einem Messwert zum nachfolgenden Zeitpunkt $t + 1$ (genannt: y)? Dazu besprechen wir zunächst –unabhängig von unserem Klima-Kontext– das Scattergramm und den Korrelationskoeffizienten, und zwar für zwei Größen x und y , die n mal (an n Objekten) gemessen wurden.

4.1 Einschub: Scattergramm und Korrelationskoeffizient

Die n Wertepaare $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ werden wie in Abb. 6 als Punkte in ein x-y-Diagramm eingetragen; die resultierende Punktwolke nennt man das Scattergramm (Streuungsdiagramm) der bivariaten Stichprobe.

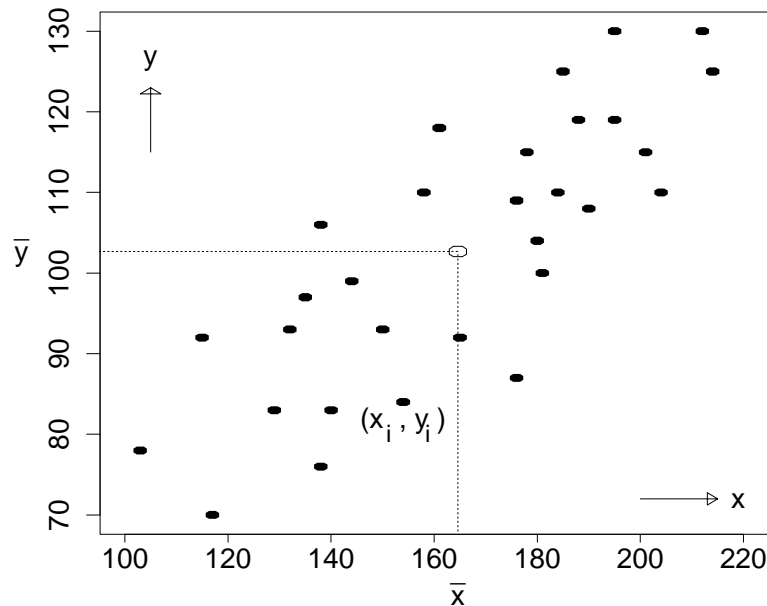


Abbildung 6: Scattergramm mit $n=30$ Punkten, $r_{x,y} = 0.8$, mit dem eingezeichneten Schwerpunkt (\bar{x}, \bar{y}) der Punktwolke.

Ein Maß für die Stärke der linearen Ausrichtung der Punktwolke stellt der (gewöhnliche oder Pearson-) *Korrelationskoeffizient* $r_{x,y}$ dar,

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad -1 \leq r_{x,y} \leq 1,$$

wobei $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ und $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i/n$ die Mittelwerte der x - bzw. y -Werte bezeichnen.

Ellipsenförmige (x, y) -Punktwolken und zugehörige Werte der Korrelation $r_{x,y}$ sind in der Abb. 7 illustriert.

4.2 Auto-Korrelationskoeffizient

Wir betrachten jetzt den Spezialfall, dass x und y die gleiche Messgröße darstellen (Temperatur bzw. Niederschlag), aber zu verschiedenen Zeitpunkten gemessen.

$$x = \text{Messwert}(t), \quad y = \text{Messwert}(t+1).$$

Das Scattergramm der Abb. 8 zeigt $12 \cdot 225$ (mittlere) Monatstemperaturen, einmal ohne und einmal mit Bereinigung von der Saisonkomponente. Die deutlich ausgerichtete Punktwolke der linken Abbildung, mit dem hohen zugehörigen Korrelationskoeffizienten $r = 0.79$, erklärt sich zum Großteil durch den –nur allmählich sich veränderenden–

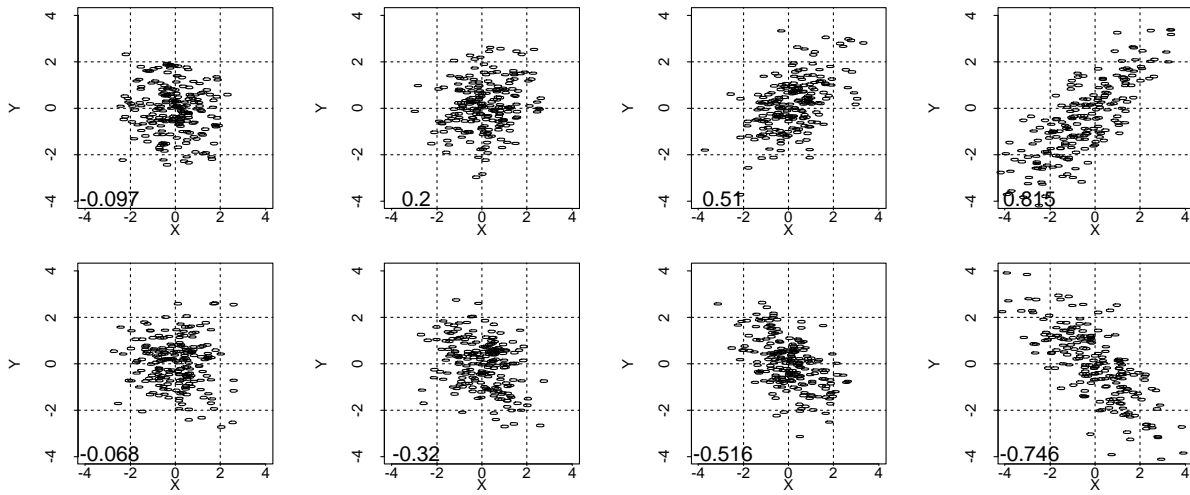


Abbildung 7: Scattergramms mit $n=200$ Punkten und mit variierendem $r_{x,y}$, *oben*: wachsendes positives $r_{x,y}$; *unten* fallendes negatives $r_{x,y}$

Jahresgang der Monatstemperaturen, enthält also, Letzteren vorausgesetzt, viel redundante Information.

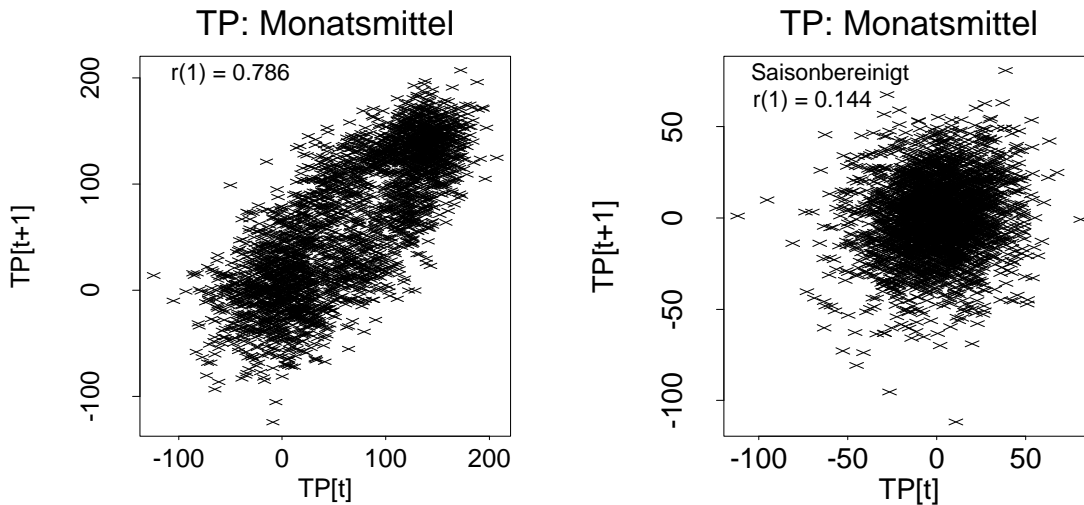


Abbildung 8: Mittlere Monatstemperaturen Y : $Y(t+1)$ über $Y(t)$. Scattergramms mit $n=12 \cdot 225$ Punkte, *links*: nicht bereinigt ($r = 0.78$); *rechts*: saisonbereinigt ($r = 0.14$)

Die Tabelle 1 bringt Auto-Korrelationen

$$r(1) = r(Y_t, Y_{t+1})$$

von Klimawerte für aufeinanderfolgende Messzeitpunkte, jeweils ohne Bereinigung (in Klammern) und mit Bereinigung von der Trend-(Saison-) Komponente. Die $r(1)$ -Werte für „Tag“ wurden aus 365 aufeinanderfolgenden Tageswerten berechnet (für einen Auszug siehe den ANHANG 2).

Tabelle 1: Auto-Korrelationen $r(1)$ für Klimawerte

Prädiktion	Temperatur			Niederschlag		
	n	$r(Y_t, Y_{t+1})$		n	$r(Y_t, Y_{t+1})$	
Jahr \rightarrow nachf. Jahr	224	(0.262)	0.116	127	(0.279)	0.191
Winter \rightarrow nachf. Winter	224	(0.068)	0.010	127	(0.143)	-0.006
Winter \rightarrow nachf. Sommer	224	(0.160)	0.105	127	(0.220)	0.171
Sommer \rightarrow nachf. Winter	224	(0.044)	-0.020	127	(-0.018)	-0.092
Monat \rightarrow nachf. Monat	2700	(0.786)	0.144	1524	(0.382)	0.022
Tag \rightarrow nachf. Tag	365	(0.952)	0.833	365	(0.135)	0.117

Nur die Trend- (Saison-) bereinigten Reihen –d. h. nur die nicht eingeklammerten Koeffizienten– werden in der folgenden Diskussion betrachtet.

Temperatur: Die Auto-Korrelation bei den Tageswerten ist sehr hoch, weniger hoch bei den Monatswerten, bei den Jahreszeit-Werten und bei den Jahreswerten.

Niederschlag: Nur bei den Jahreswerten, und im Fall *Winter mit nachfolgenden Sommer*, ist die Auto-Korrelation deutlich von Null verschieden (aber gering), bei Monats- und Tageswerten kann sie (fast) vernachlässigt werden.

Dies ist komplementär zur Situation bei der Temperatur (doch ist beim Niederschlag das Korrelations-Niveau geringer).

Was bedeutet ein bestimmter $r(1)$ -Wert in Hinblick auf die Prädiktion?

4.3 Einschub: Korrelation und Prädiktion von „Extremen“ (von überdurchschnittlichen Werten)

Im Folgenden wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass auf einen X-Wert, der größer als ein Schwellwert Q ist, ein Y-Wert mit der gleichen Eigenschaft folgt. Falls also der X-Wert größer als Q ist, dann ergeben sich (aufgefächert nach dem Korrelationskoeffizient $r = r_{x,y}$) die Treffer-Wahrscheinlichkeiten IP der Tabelle 2 dafür, dass auch der Y-Wert größer als Q ist. Die oberen, rechten Quadranten der Abb. 9 dienen zur Veranschaulichung. Dieser Abbildung und der Tabelle 2 ist die Annahme zugrunde gelegt, dass X und Y zwei normalverteilte Zufallsgrößen sind, korreliert mit dem Koeffizienten r . Als Schwellwerte haben wir *Quantile* Q_γ (auch $\gamma \cdot 100$ % Perzentile genannt) gewählt, und zwar für $\gamma = 0.5, 0.75, 0.90$. Diese Schwellen könnte man –der Reihe nach– auch Durchschnittswert, oberer 25 %-Wert, oberer 10 %-Wert, nennen.

Tabelle 2. Bedingte Wahrscheinlichkeiten für das Übertreffen von Schwellwerten

Bedingte Wahrscheinl.	Korrelation $r = r_{x,y}$							
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70
$IP(Y > Q_{0.50} X > Q_{0.50})$	0.50	0.53	0.56	0.60	0.63	0.67	0.70	0.75
$IP(Y > Q_{0.75} X > Q_{0.75})$	0.25	0.29	0.34	0.40	0.45	0.51	0.57	0.64
$IP(Y > Q_{0.90} X > Q_{0.90})$	0.10	0.14	0.17	0.24	0.29	0.39	0.45	0.53

Beispiel: Ist X größer als der Durchschnitt $Q_{0.50}$, also ein *über*-durchschnittlicher

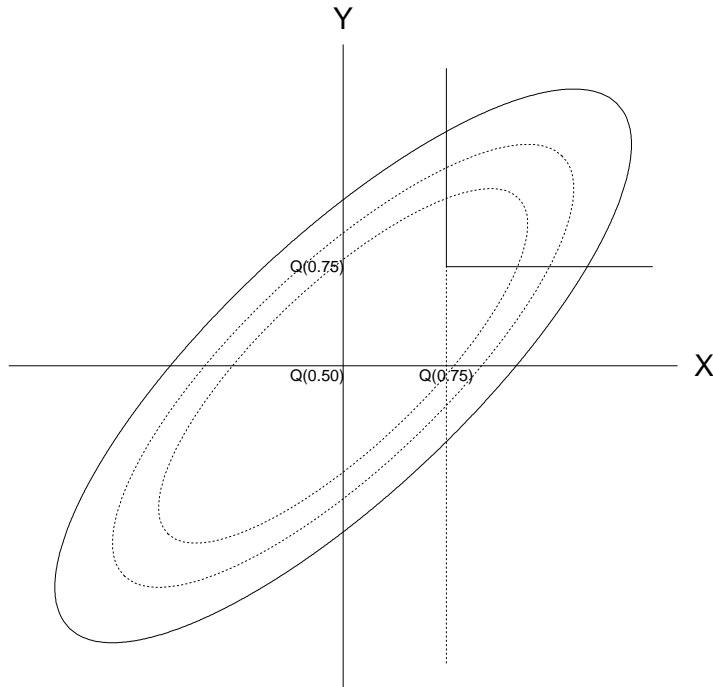


Abbildung 9: Elliptische Punktvolke für ein positives $r_{x,y}$. Quadranten beinhalten Messpunkte, die zu überdurchschnittlichen x- und y-Werten gehören.

Wert, dann ist die Trefferquote dafür, dass auch Y größer als der Durchschnitt ist, gleich

50 % bei $r = 0$; 60 % bei $r = 0.30$; 70 % bei $r = 0.60$.

Ist X größer als der Wert $Q_{0.90}$, also ein „oberer 10-Prozent-Wert“, dann beträgt die Trefferquote dafür, dass auch Y ein solcher ist, gleich

10 % bei $r = 0$; 24 % bei $r = 0.30$; 45 % bei $r = 0.60$.

4.4 Anwendung auf Klimadaten

Nur die Trend- (Saison-) bereinigten Reihen werden betrachtet. Die Korrelation r steht hier für die Autokorrelation $r(1)$.

Die meisten Autokorrelationen $r(1)$ liegen zwischen 0.0 und 0.2. Die Trefferrate bei der Vorhersage von überdurchschnittlichen Werten (bei Vorliegen eines solchen) liegt nach Aussage von Tabelle 2 unter 56 % (gegenüber 50 % beim Raten mittels „Münzwurf“).

Allein bei den Tagestemperaturen ($r(1) > 0.70$) liegt diese Trefferrate über 75 %. Liegt ein „10 % Tag“ vor, so kann das immerhin noch mit einer Trefferrate von über 53 % für den nachfolgenden Tag ausgesagt werden (gegenüber 10 % beim „Raten“).

Bei den Tages-Niederschlägen ist der Koeffizient $r(1)$ nicht sehr aussagekräftig. Denn fast die Hälfte der Tage ist niederschlagsfrei. Bei Dichotomisierung (Niederschlag nein oder ja, d. h. NSchl=0 oder >0) erhalten wir für die 365 Tage die folgende 2×2 -

Häufigkeitstafel

heutige Tag	nachfolgender Tag		Σ
	NSchl=0	NSchl>0	
NSchl=0	99	65	164
	0.604	0.396	1.0
NSchl>0	65	135	200
	0.325	0.675	1.0
Σ	164	200	364

Bleibt ein Tag niederschlagsfrei, so können wir mit einer Trefferquote von

$$\frac{99}{164} \cdot 100 \approx 60 \%$$

dasselbe vom nachfolgenden Tag prophezeien.

(Gegenüber 50 % beim „Münzwurf“ bzw. gegenüber $164/364 \cdot 100 \approx 45 \%$ bei Berücksichtigung der Häufigkeit von trockenen/nassen Tagen)

Bei „Wettspielen“ auf das jeweils anstehende Wetter (auf Temperatur, Niederschlag) kämen Zahlenwerke wie die Tab. 2 oder wie die obige 2×2 -Tafel zu Bedeutung.

5 Klima-Zyklen

Können wir in den jährlichen Temperatur-/Niederschlags-Daten Zyklen feststellen? Beispielsweise werden in der Literatur öfters Zyklen in der Winterkälte diskutiert, vgl. Cehak (1980), Pruscha (1986).

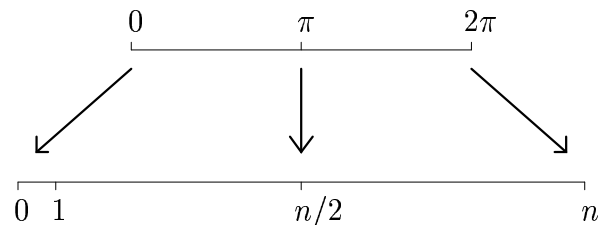
5.1 Einschub: Fourierkoeffizienten, Periodogramm, Spektrum

Wir verwenden das *Orthogonalsystem* der folgenden n Funktionen,

$$1, \quad \cos(\omega_j t), \quad j = 1, \dots, n/2, \quad \sin(\omega_j t), \quad j = 1, \dots, n/2 - 1, \quad (n \text{ gerade}),$$

mit den sog. Fourierfrequenzen

$$\omega_j = \frac{2\pi}{n} \cdot j,$$



vergleiche Abb. 10. Durch die Transformation $t \rightarrow (2\pi/n)t$ wird das Intervall $[0, 2\pi]$ auf das Beobachtungsintervall $[0, n]$ transformiert. Auf der Basis dieser Funktionen lautet die Fourier-Darstellung der Zeitreihe Y_1, \dots, Y_n

$$Y_t = 1 \cdot a_0 + \sum_{j=1}^{n/2} a_j \cdot \cos(\omega_j t) + \sum_{j=1}^{n/2-1} b_j \cdot \sin(\omega_j t), \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

mit den *Fourierkoeffizienten* a_j, b_j . Wir definieren das

$$(\text{normierte}) \text{ Periodogramm } I(\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, n/2,$$

durch die Gleichung

$$I(\omega_k) = \frac{n}{4\pi} \frac{1}{s_y^2} (a_k^2 + b_k^2), \quad k = 1, 2, \dots, n/2 - 1,$$

(s_y^2 die Varianz der Y_1, \dots, Y_n) und tragen es auf über

- Schwingungs-Anzahl $k = 1, 2, \dots, n/2$ bzw. über
- Periode(n-Länge) $T = n, n/2, \dots, 2$ bzw. über
- Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/n, \dots, \pi$.

Diese *Frequenzanalyse* der Zeitreihe geht von der Vorstellung aus, dass die „Oszillation“ der beobachteten Reihe durch Überlagerung von harmonischen (sin, cos) Schwingungen entsteht. Der Periodogrammwert $I(\omega_k)$ gibt an, wie stark eine „Schwingung“ mit Schwingungsanzahl k (Periodenlänge $T = n/k$, Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/n \cdot k$) an der Oszillation der Zeitreihe beteiligt ist.

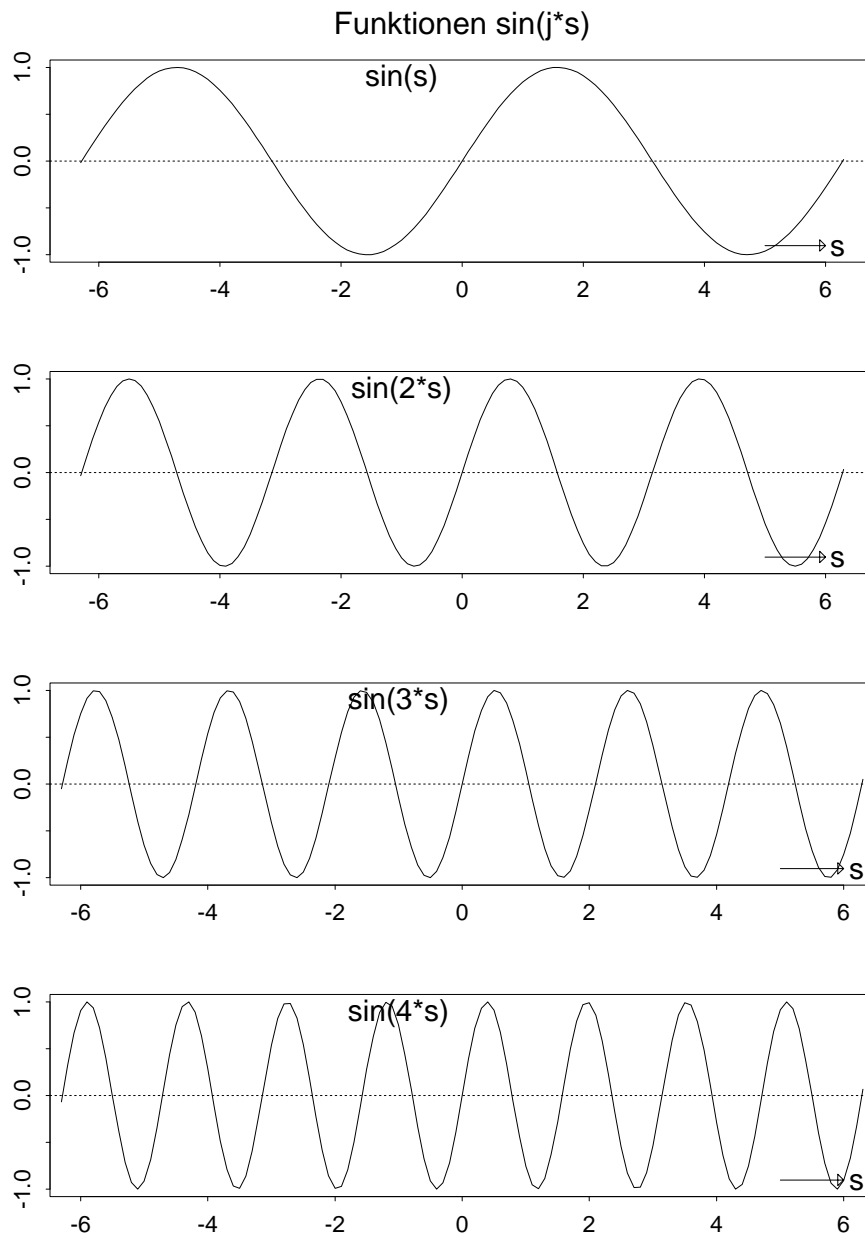
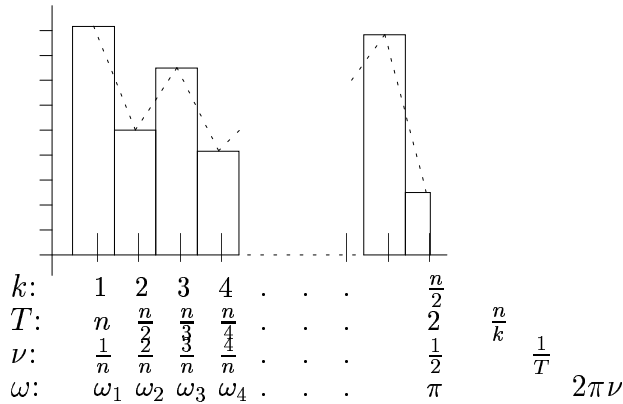


Abbildung 10: Die trigonometrischen Funktionen $\sin(j \cdot s)$, aufgetragen über s , für $j = 1, 2, 3, 4$. Die Substitution $s = \frac{2\pi}{n} \cdot t$ führt zu den Funktionen $\sin(\omega_j \cdot t)$.

Histogramm-Darstellung von $I(\omega_k)$



Das Periodogramm ist ein „Linienspektrum“ und sein Verlauf ist i. A. sehr „gezackt“. Durch Glättung des Periodogramms entsteht die **Spektraldichte-Schätzung** $\hat{f}(\omega)$ der Zeitreihe, vgl. Pruscha (2005).

5.2 Periodogramm- und Spektraldichte-Analyse

Eine einfache Möglichkeit der Glättung besteht in der Bildung gleitender Mittelwerte, jeweils über eine Anzahl $2M + 1$ von Werten, (jeweils M Werte links und M Werte rechts von einer Beobachtung: diskretes *Danielfenster*).

Die in den folgenden Abbildungen eingetragenen Schranken b_l bzw. B_l , das sind

$$b_l = -(1/\pi) \cdot \ln(\alpha/l), \quad B_l = 1/(\pi\nu) \cdot \chi_{\nu, 1-\alpha/l}^2, \quad \nu = 4M,$$

($\chi_{\nu, \gamma}^2$ das γ -Quantil der χ^2 -Verteilung mit ν Freiheitsgraden) beziehen sich auf das Periodogramm bzw die Spektraldichte einer reinen Zufallsreihe (mit gleicher Varianz wie die beobachtete Reihe). Beim Periodogramm z. B. ist die Bedeutung dieser Schranken wie folgt: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Maximum von l Werten (an l vorher fixierten Stellen) die Schranke b_l überschreitet, beträgt für eine Zufallsreihe $\alpha = 0.05$. Die *Bonferroni*-Korrektur α/l (anstatt α) bezieht sich auf die Tatsache, dass man sich nicht für den Wert des Periodogramms bzw. der Spektraldichte an einer einzigen (vorher festgelegten) Stelle T interessiert, sondern an mehreren (l) Stellen. Die $l = 1$ -Schranke jedenfalls ist zu niedrig. (Man beachte, dass im Mittel 5 % der Periodogramm-Werte einer Zufallsreihe über der Schranke b_1 liegen). Wir werden (etwas willkürlich) bei Werten über der $l = 4$ - Schranke von schwacher Signifikanz sprechen, bei Werten über der $l = 12$ -Schranke von Signifikanz.

Berücksichtigt man noch die Autokorrelation $r \equiv r(1)$ der Zeitreihe, so ist die Spektraldichte-Schätzung $\hat{f}(\omega)$ noch durch die Größe

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \omega + r^2}$$

zu teilen, damit die Schranken B_l weiterhin gültig bleiben. Dies wurde hier nicht durchgeführt; die $r = r(1)$ -Werte sind nach Ausweis von Tab. 1 für die bereinigten Reihen klein.

Stationarität. Die hier vorgestellte Frequenzanalyse verlangt die *Stationarität* der Zeitreihe. Wir gehen auf diese Forderung insofern ein, dass wir nicht die beobachteten Werte selber, sondern die *Residuen* vom polynomialen Trend in die Analyse eingehen lassen. Durch diese *Trendbereinigung* machen sich langfristige Schwankungen ($T \geq 10$ oder 20 Jahre etwa) nur abgeschwächt in der Frequenzanalyse bemerkbar.

Hohenpeissenberg, Temp. Jahr (Resid.) 1781-2005

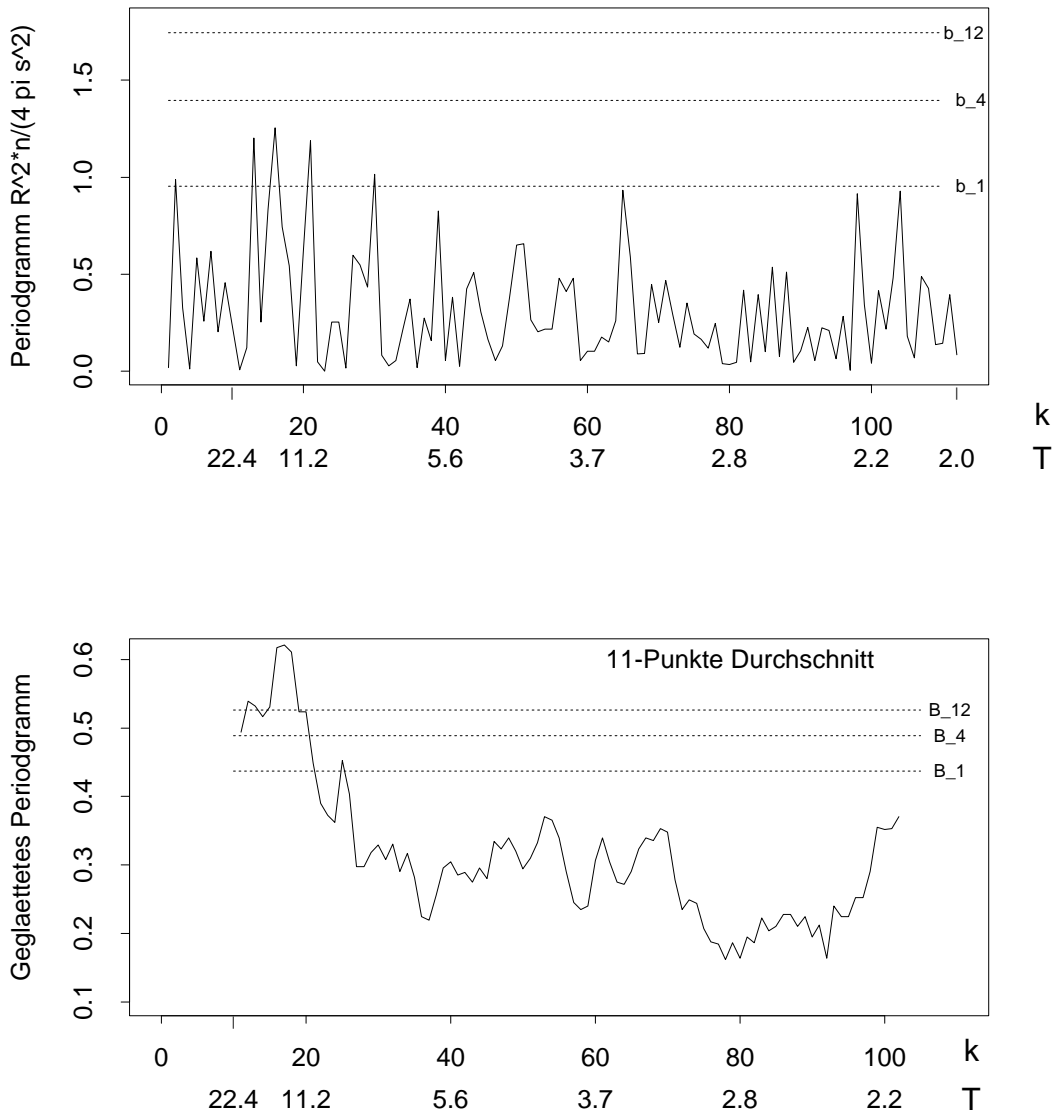


Abbildung 11: Temperatur-Mittelwerte Jahr. Zeitreihe der Residuen vom polynomia-
 len Trend. In das Periodogramm bzw. das geglättete Periodogramm eingetragen sind
 Schranken b_1, b_4, b_{12} bzw. B_1, B_4, B_{12} . Das Periodogramm weist Maxima auf bei Pe-
 riodenlängen von $T = 17, 14, 10.7, 7.5, 3.5, 2.2, 2.1$

Hohenpeissenberg, Temp. Winter (Resid.) 1781-2005

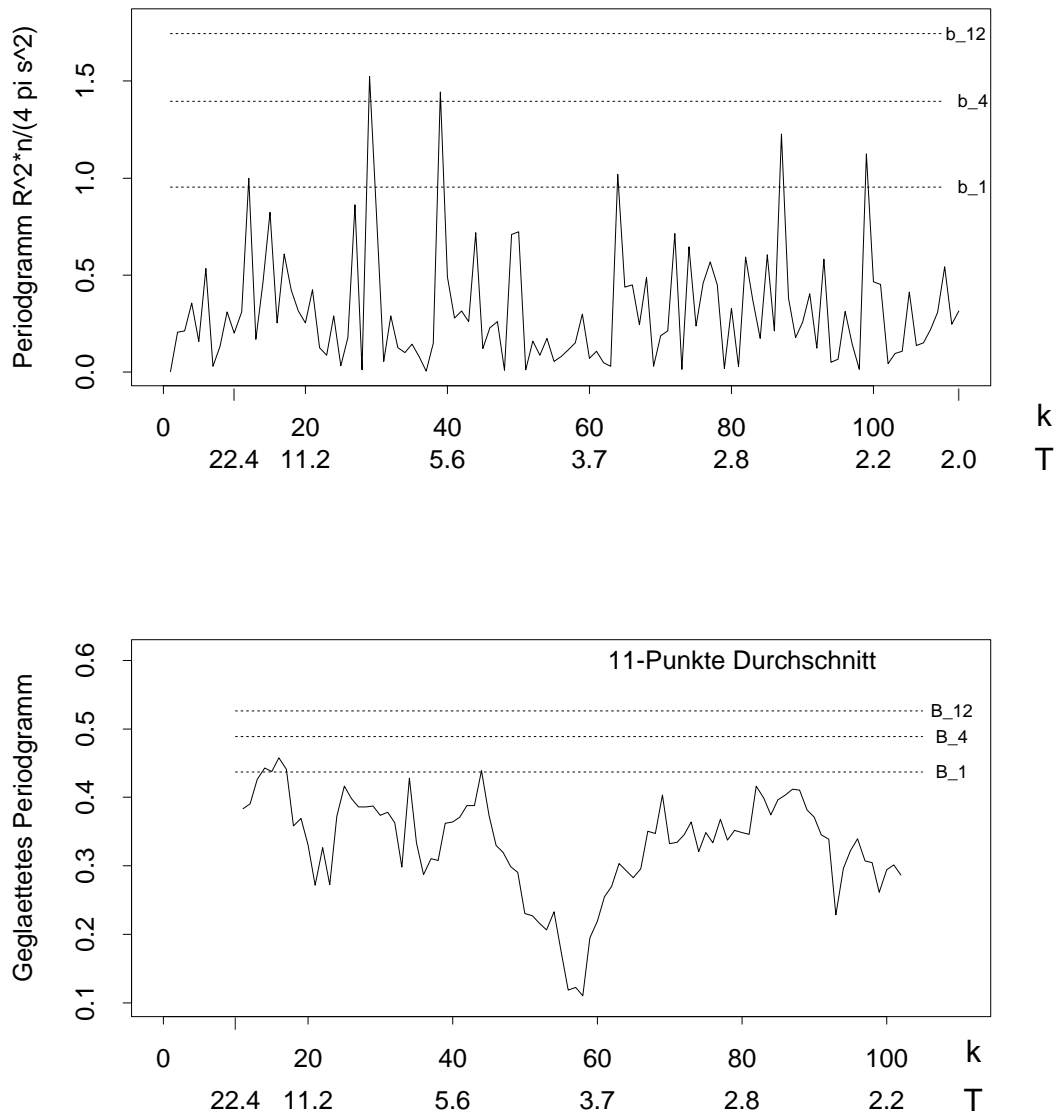


Abbildung 12: Temperatur-Mittelwerte Winter. Zeitreihe der Residuen vom polynomialen Trend. In das Periodogramm bzw. das geglättete Periodogramm eingetragen sind Schranken b_1, b_4, b_{12} bzw. B_1, B_4, B_{12} . Das Periodogramm weist Maxima auf bei Periodenlängen von $T = 7.8, 5.8, 3.5, 2.6, 2.2$

5.3 Temperatur: Jahres- und Winterwerte

Das Periodogramm der Abbildungen 11 und 12 weist für beide Reihen (Jahres- und Winter-Reihe) Gipfel (*peaks*) an diversen Periodenlängen T auf.

Für die Jahresreihe werden hohe Werte bei langjährigen Perioden (deutlich über 10 Jahre) ausgewiesen (im geglätteten Periodogramm sogar signifikant hohe). Ob dies echte Zyklen oder Reste eines nicht bereinigten Trends sind, bleibt weiteren Analysen vorbehalten. Die *peaks* des Periodogramms jedenfalls sind sämtliche nicht signifikant. Vergleiche Schönwiese *et al.*, 1993, Abb. 1 für eine Spektraldichte-Schätzung der unbeeinigten Reihe, mit dominant hohen Werten für $T \gg 20$ Jahre.

Für die Winterreihe zeigen allenfalls die Periodogramm-Werte bei $T = 7.8$ und 5.8 Jahre schwache Signifikanz.

In beiden Periodogrammen gibt es einen „Nebengipfel“ bei $T = 2.2$ Jahre. Eine mögliche meteorologische Begründung ist die quasi-periodische 2,2-jährige (d. i. 26-monatige) Schwingung der Windrichtung (englisch QBO = „quasi-biannual oscillation“) zwischen Ost- und Westwind in der tropischen Stratosphäre (vgl. Malberg, 1997).

5.4 Niederschlag: Winterwerte

Das Periodogramm der Abbildung 13 zeigt einen scharfen, signifikanten Gipfel bei $T = 4.0$ Jahre. Auch die geglättete Version bestätigt den Periodenbereich um 4 Jahre als bedeutsam. Möglicherweise ist diese Periode –als ungefähre Verdopplung der eben genannten Zahl 2.2– auch ein Ausfluss des QBO-Phänomens. Dieser 4-Jahres-Zyklus ist jedenfalls der statistisch am besten gesicherte Ertrag unserer Frequenzanalyse.

Hohenp., Niederschl. Winter (Resid.) 1879-2005

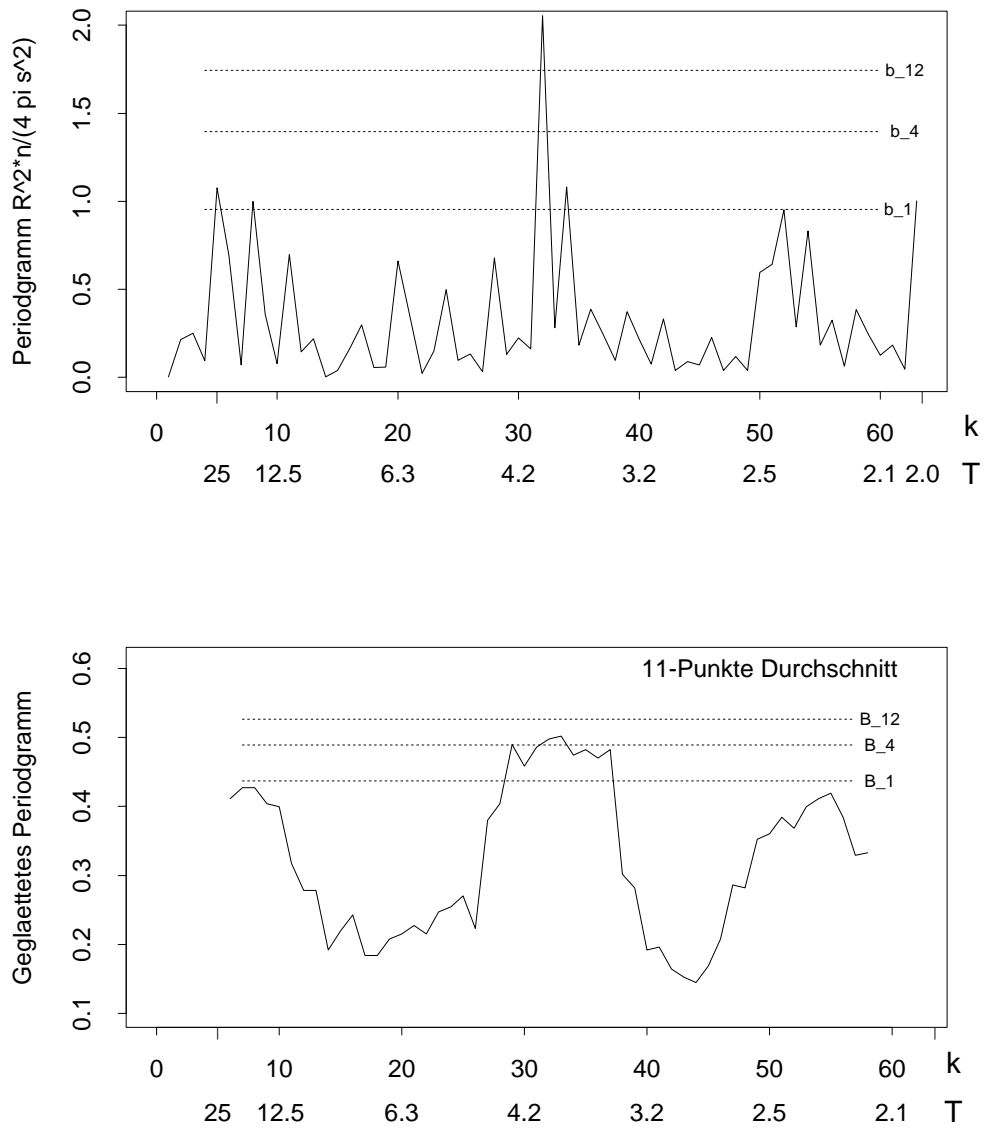


Abbildung 13: Niederschlag Winter. Residuen vom polynomialen Trend. Eingetragen sind Schranken b_1 , b_4 , b_{12} bzw. B_1 , B_4 , B_{12} . Das Periodogramm weist ein Maximum auf bei einer Periodenlänge von $T = 4.0$

6 Wetterregeln

„Bauernregeln“ beziehen sich nach Malberg (2003) meistens auf

- ein bestimmtes Gebiet (wahrscheinlich nicht gerade der Hohe Peißenberg),
- auf eine bestimmte Zeit (hier dagegen über Jahrhunderte gemittelt),
- auf extremere Werte (hier dagegen alle gemessenen Werte),
- auf Ernteertrag (während uns heute meistens das Urlaubswetter interessiert).

Meinen allgemeinen Standpunkt zu bäuerlichen Wetterregeln möchte ich so ausdrücken:

- Hochachtung vor den früheren bäuerlichen Beobachtern (ohne geeignete Mess-, Aufzeichnungs-, Auswertungs-Vorrichtungen)
- Wenig Achtung vor Nachbetern in der heutigen Zeit (die sich bequem mit der Aura der Tradition umgeben, statt Datenbanken und Auswertungs-Software zu bemühen)

6.1 Erhaltungs-(Beharrungs-)Regeln

Bsp 1: Ist Dezember lind → der ganze Winter ein Kind

Bsp 2: Kühler September → kalter Oktober

6.2 Sechs-Monats-Regeln

Bsp 3: Der Mai kommt gezogen ← wie der November verflogen

Bsp 4: Wie der August war → wird der künftige Februar

6.3 Jahres-Ausgleichs-Regeln

Bsp 5: Wenn der Sommer warm ist → so der Winter kalt

Bsp 6: Wenn der Winter kalt ist → so der Sommer warm

6.4 Singularitätsregeln, Lostage

Bsp: Ist's an Lichtmeß (2.Febr.) hell und rein → wird ein langer Winter sein.

Bsp: Regnet's an St. Peters Tag (29.Juni) → drohen 30 Regentag.

6.5 „Hundertjähriger“ Kalender

Basis sind die siebenjährigen (1652–1658) Wetteraufzeichnungen des Abtes Mauritius Knauer (Langheim bei Bamberg). geleitet von der Vorstellung eines regelmäßig sich wiederholenden siebenjährigen Turnus: Saturn-, Jupiter-, Mars-, Sonne-, Venus-, Merkur-, Mond- Jahr. Später wurden aus den sieben Jahren (durch „Extrapolation“) hundert Jahre.

6.6 Aussage der Klimadaten Hohenpeißenberg

Auf die Wetterregeln nach 6.4 und 6.5 gehen wir nicht ein. Zu den Regeln der obigen Beispiele 1 – 6 sind in der folgenden Tabelle angegeben:

- Korrelationskoeffizient r aus den Hohenpeißenberg-Daten.
- Prozentualer Anteil $\% [Y > \bar{y}|X > \bar{x}]$ der Fälle, in denen auf einen überdurchschnittlichen X-Wert auch ein überdurchschnittlicher Y-Wert folgt.

Im Beispiel 2 zielt die Regel auf den Prozentsatz $\% [Y < \bar{y}|X < \bar{x}]$ ab, im Beispiel 5 auf $\% [Y < \bar{y}|X > \bar{x}]$, im Beispiel 6 auf $\% [Y > \bar{y}|X < \bar{x}]$. Diese Prozentzahlen sind ebenfalls –zusätzlich zu den Prozentzahlen $\% [Y > \bar{y}|X > \bar{x}]$ – angegeben.

- Die (zum Wert der Korrelation r gehörende) bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y > Q_{0.5}|X > Q_{0.5})$ aus der Tabelle 2 in 4.3.

Berliner Werte nach Malberg (2003), Dahlemer Aufzeichnungen 1908 – 1987.

Tabelle 3. Trefferquoten zu den Regeln 1–6.

Bsp	$X \rightarrow Y$		$r(X, Y)$	$\% [Y > \bar{y} X > \bar{x}]$		theor. IP Tab.2
				$[> >]$	Berlin Hohenp	
1	Tp Dez	Tp Jan	0.12	70 %	56 %	.54
1	Tp Dez	Tp Feb	0.10	60 %	56 %	.53
2	Tp Sep	Tp Okt	0.12	62 %	56 %	.54
				$[< <]$	62 %	51 %
3	Tp Nov	Tp Mai	0.04	50 %	53 %	.51
	Ns Nov	Ns Mai	-0.01	50 %	43 %	.50
4	Tp Aug	Tp Feb	0.09	73 %	54 %	.53
	Ns Aug	Ns Feb	0.06	50 %	46 %	.51
5	Tp Som	Tp Win	0.04		55 %	.51
				$[< >]$		45 %
	Ns Som	Ns Win	-0.02		43 %	.50
6	Tp Win	Tp So	0.16		56 %	.55
				$[> <]$		40 %
	Ns Win	Ns So	0.22		62 %	.57

Die aus den Hohenpeißenberg-Reihen ermittelten Trefferquoten sind sehr mäßig und können die Regeln nicht bestätigen. In einigen Fällen (Bspe 2, 5, 6) wird eher eine andere Version oder sogar das Gegenteil der Regel nahegelegt.

Bezüglich der Regeln 1, 2 und 4 bringen die Dahlem-Reihen deutlich höhere Trefferquoten hervor als die vom Hohenpeißenberg. Das kann daran liegen, dass die Ersteren kürzer sind und vielleicht auch (klimatisch) näher an den Entstehungsorten der Regeln liegen.

7 Danksagung

Dem Deutschen Wetterdienst in Offenbach am Main bin ich für die Überlassung ihrer historischen Daten zu Dank verpflichtet. Insbesondere habe ich Herrn Wolfgang Fricke vom Observatorium Hohenpeißenberg für die ausdauernde Beratung und die persönlichen Mitteilungen zu danken.

8 Literatur

- W. Attmannspacher (Hrsg.) *200 Jahre meteorologische Beobachtungen auf dem Hohenpeißenberg 1781–1980*, Bericht Nr. 155 des DWD. Offenbach/m 1981
- K. Cehak. Rezente Änderung der Winterstrenge im Donauraum. Arch. Met. Geoph. Biokl. B, 28, 243–255, 1980.
- F. Fiedler. *Klimawerte zur Temperatur- und Windschichtung*. Wiss. Mitt. Nr. 18 des meteor. Inst. der Univ. München 1971.
- R. Glaser. *Klimageschichte Mitteleuropas*, Wissensch. Buchgem. Darmstadt 2001
- H. Grebe. *Temperaturverhältnisse des Observatoriums Hohenpeißenberg*, Bericht Nr. 36 des DWD. Offenbach/m 1957
- H. Malberg. *Meteorologie und Klimatologie*, 3. Aufl. Springer 1997
- H. Malberg. *Bauernregeln*, 4. Aufl. Springer 2003
- H. Pruscha. *A Note on Time Series Analysis of Yearly Temperature Data*. J. Royal Statist. Soc. A, 149, 174–185, 1986.
- H. Pruscha. *Statistisches Methodenbuch: Verfahren, Fallstudien, Programmcodes*, Springer 2005
- C.D. Schönwiese *et al.* *Klimatrend-Atlas*. Bericht Nr. 20 des Z. f. Umweltforschung Frankfurt/m 1993
- C.D. Schönwiese. *Klimaschwankungen*, Springer 1979

Die Temperaturreihe Hohenpeißenberg 1781–2004 findet man unter

www.math.lmu.de/~pruscha/ Stichwort: *Statistisches Methodenbuch*

ANHANG 1:

Winter- und Sommer-Reihe Hohenpeißenberg, 1879–2005,
Niederschlagshöhe [1/10 mm] und mittlere Temperatur [°C]

Nr	Jahr	Niederschl.		Temperatur	
		Wi	So	Wi	So
1	1879	1451	3939	-2.533	13.833
2	1880	1031	5073	-3.400	13.633
3	1881	1327	3779	-1.100	15.066
4	1882	476	4681	0.000	12.533
5	1883	938	4951	-0.133	13.566
6	1884	1535	4933	-0.400	13.500
7	1885	809	4006	-0.466	14.766
8	1886	1383	5474	-3.433	13.766
9	1887	952	2703	-3.133	15.033
10	1888	2050	4596	-3.666	13.133
11	1889	1313	4165	-2.666	13.966
12	1890	741	5736	-2.733	12.966
13	1891	798	3799	-5.466	13.333
14	1892	2049	4365	-1.266	14.800
15	1893	1761	3617	-3.800	14.600
16	1894	771	3564	-1.966	13.966
17	1895	883	3669	-6.133	14.666
18	1896	1495	4750	-2.666	13.266
19	1897	1255	5066	-0.700	14.433
20	1898	1548	3598	0.266	14.066
...					
108	1986	1616	4570	-2.100	14.233
109	1987	2236	4552	-2.233	13.833
110	1988	1978	5180	1.266	14.500
111	1989	2219	4905	1.466	14.233
112	1990	1941	6024	3.100	14.666
113	1991	1167	3799	-1.933	15.100
114	1992	1446	4533	-0.566	16.366
115	1993	1424	7220	0.166	14.233
116	1994	1735	3403	0.800	16.800
117	1995	1812	5475	0.733	14.600
118	1996	1357	4399	-2.200	14.000
119	1997	1020	4585	-0.133	14.566
120	1998	1634	3229	1.666	15.400
121	1999	2189	4379	-0.333	14.700
122	2000	2199	5171	-0.066	15.266
123	2001	1620	4776	1.366	15.200
124	2002	1561	4958	0.066	15.866
125	2003	1789	3119	-1.633	19.066
126	2004	1929	4142	-0.200	15.033
127	2005	1746	5055	-1.466	14.833
128	2006	1342		-2.533	

ANHANG 2:

Mittlere Tages-Temperaturen [1/10 °C] und tägliche Niederschlagshöhen [1/10 mm]

Januar - Dezember 1966, Garching, aus Fiedler (1970).

Tag	Mon	TP	NS				
1	1	66	63	1	7	135	55
2	1	62	13	2	7	152	0
3	1	32	3	3	7	192	0
4	1	-7	16	4	7	202	0
5	1	-68	1	5	7	183	24
6	1	-87	0	6	7	161	215
7	1	-53	0	7	7	118	158
8	1	-47	0	8	7	118	152
9	1	-86	0	9	7	145	0
10	1	-77	1	10	7	171	0
11	1	-83	0	11	7	178	0
12	1	-93	12	12	7	170	12
13	1	-92	10	13	7	194	0
14	1	-92	3	14	7	167	20
15	1	-121	1	15	7	148	36
16	1	-144	0	16	7	151	12
17	1	-150	0	
18	1	-129	0	
19	1	-127	0	11	12	23	74
20	1	-115	0	12	12	24	107
21	1	-72	0	13	12	35	28
...			...	14	12	13	8
...			...	15	12	-3	1
15	6	188	0	16	12	-19	0
16	6	195	0	17	12	7	21
17	6	212	0	18	12	48	24
18	6	214	0	19	12	42	0
19	6	115	79	20	12	51	12
20	6	129	63	21	12	0	79
21	6	144	55	22	12	-9	8
22	6	165	65	23	12	15	46
23	6	178	0	24	12	48	51
24	6	161	73	25	12	2	103
25	6	132	108	26	12	-29	2
26	6	135	54	27	12	-63	0
27	6	138	62	28	12	-14	0
28	6	150	226	29	12	6	6
29	6	103	0	30	12	51	77
30	6	109	101	31	12	30	13