

# Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten

Priv.-Doz. Dr. Iosif Petrakis

Ludwig-Maximilians-Universität München  
Sommersemester 21

## Inhaltsverzeichnis

|  |    |
|--|----|
| Kapitel 1. Zahlssysteme  | 1  |
| 1.1. Mengen  | 1  |
| 1.2. Funktionen  | 5  |
| 1.3. Vollständige Induktion                                    | 7  |
| 1.4. Die rationalen Zahlen                                     | 13 |
| 1.5. Die reellen Zahlen  | 14 |
| 1.6. Die Anordnungs-Axiome                                     | 17 |
| 1.7. Folgen reeller Zahlen                                     | 19 |
| 1.8. Das Vollständigkeits-Axiom                                | 27 |
| 1.9. Unendliche Reihen   | 29 |
| 1.10. Konvergenzkriterien für Reihen                           | 34 |
| <br>   |    |
| Kapitel 2. Reelle Funktionen                                   | 37 |
| 2.1. Der Graph einer reellen Funktion                          | 37 |
| 2.2. Grenzwerte  | 42 |
| 2.3. Stetigkeit  | 44 |
| 2.4. Der Zwischenwertsatz                                      | 48 |
| 2.5. Elementare Funktionen                                     | 52 |
| 2.6. Differentiation   | 56 |
| 2.7. Differentiations-Regeln                                   | 60 |
| 2.8. Ableitung der Umkehrfunktion und die Kettenregel          | 63 |
| 2.9. Der Mittelwertsatz  | 66 |
| 2.10. Treppenfunktionen  | 69 |
| 2.11. Das Oberintegral und das Unterintegral                   | 72 |
| 2.12. Das Riemannsches Integral                                | 73 |
| 2.13. Integration und Differentiation                          | 75 |
| 2.14. Die Substitutionsregel und partielle Integration         | 77 |
| <br>   |    |
| Kapitel 3. Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik | 81 |
| 3.1. Wahrscheinlichkeitsräume                                  | 81 |
| 3.2. Zufallsvariablen  | 90 |

Literaturverzeichnis

95

## KAPITEL 1

# Zahlsysteme

In diesem Kapitel werden wir einige grundlegende Eigenschaften der folgenden Zahlensysteme betrachten: der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$ , der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ , der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ , und der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Dazu werden wir eine kurze Einführung in die grundlegenden Mengenbegriffe und in den Begriff der Funktion zwischen zwei Mengen machen.

### 1.1. Mengen

Die Menge ist eines der wichtigsten und grundlegenden Konzepte der Mathematik. Mit ihrer Betrachtung beschäftigt sich die Mengenlehre.

DEFINITION 1.1.1. Eine *Menge*  $X$  ist eine Zusammenfassung von einzelnen mathematischen Objekten. Ein mathematisches Objekt  $x$  in  $X$  heißt ein *Element* von  $X$ , und wir schreiben

$$x \in X.$$

Wenn  $y$  kein Element von  $X$  ist, dann schreiben wir

$$y \notin X :\Leftrightarrow \text{nicht } (y \in X).$$

Die *leere* Menge  $\emptyset$  hat kein Element. Die Mengen  $X$  und  $Y$  heißen *gleich*, und wir schreiben  $X = Y$ , genau dann wenn  $X$  und  $Y$  die gleichen Elemente enthalten, d.h.

$$X = Y :\Leftrightarrow \forall x (x \in X \Leftrightarrow x \in Y).$$

Eine Menge  $A$  ist eine *Teilmenge* von  $X$ , und wir schreiben  $A \subseteq X$ , genau dann wenn jedes Element von  $A$  ein Element von  $X$  ist, d.h.

$$A \subseteq X :\Leftrightarrow \forall a (a \in A \Rightarrow a \in X).$$

Wenn  $A \subseteq X$  und  $x \in X$ , sodass  $x \notin A$ , dann ist  $A$  eine *echte* Teilmenge von  $X$ , und wir schreiben  $A \subsetneq X$ . Die Menge  $\mathcal{P}(X)$  aller Teilmengen von  $X$  heißt *Potenzmenge* von  $X$ .

Sehr oft benutzen wir die Symbole  $\{, \}$  um eine Menge zu bezeichnen.

BEISPIEL 1.1.2. Die Menge aller natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  ist die Menge

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Die Menge aller ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  ist die Menge

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Offensichtlich gilt

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}.$$

Sei  $X$  eine Menge. Wir können eine Teilmenge  $X_P$  von  $X$  durch eine Eigenschaft  $P(x)$  auf  $X$  definieren, indem wir alle Elemente von  $X$  zusammenfassen, für die gilt  $P(x)$  ist wahr. Wir schreiben

$$X_P = \{x \in X \mid P(x)\}.$$

BEISPIEL 1.1.3. Die Menge **Even** aller geraden Zahlen ist definiert durch

$$\mathbf{Even} = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}, \quad P(n) :\Leftrightarrow \exists_{m \in \mathbb{N}} (n = 2m),$$

wobei

$$\exists_{m \in \mathbb{N}} (n = 2m) :\Leftrightarrow \exists_m (m \in \mathbb{N} \ \& \ n = 2m).$$

Es gilt  $\mathbf{Even} \subsetneq \mathbb{N}$ . Die Menge **Odd** aller ungeraden Zahlen ist definiert durch

$$\mathbf{Odd} = \{n \in \mathbb{N} \mid Q(n)\}, \quad Q(n) :\Leftrightarrow \exists_{m \in \mathbb{N}} (n = 2m + 1).$$

Die Mengen  $X, Y$  sind gleich genau dann wenn  $X$  eine Teilmenge von  $Y$  ist und  $Y$  eine Teilmenge von  $X$  ist, d.h.

$$X = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \ \& \ Y \subseteq X.$$

DEFINITION 1.1.4. Seien  $X, Y$  Mengen. Die *Schnittmenge*  $X \cap Y$ , oder der *Schnitt* von  $X$  und  $Y$  ist die Menge aller Objekte die gleichzeitig Elemente von  $X$  und  $Y$  sind, d.h.

$$X \cap Y = \{z \mid z \in X \ \& \ z \in Y\}.$$

Die *Vereinigungsmenge*, oder die *Vereinigung*  $X \cup Y$  von  $X$  und  $Y$  ist die Menge aller Objekte die Elemente von  $X$  oder von  $Y$  sind, d.h.

$$X \cup Y = \{z \mid z \in X \ \text{oder} \ z \in Y\}.$$

Wenn  $A \subseteq X$ , ist das *Komplement*  $A'$  von  $A$  in  $X$  die Menge aller Elemente von  $X$  die nicht in  $A$  sind, d.h.

$$A' = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

Offensichtlich gelten

$$\text{Odd} \cap \text{Even} = \emptyset,$$

$$\text{Odd} \cup \text{Even} = \mathbb{N},$$

$$\text{Odd}' = \text{Even},$$

$$\text{Even}' = \text{Odd}.$$

SATZ 1.1.5. Sei  $X$  eine Menge und seien  $A, B, C$  Teilmengen von  $X$ .

(i)  $\emptyset \subseteq X$  und  $X \subseteq X$ .

(ii)  $A \cap A = A$  und  $A \cup A = A$ .

(iii)  $A \cap B = B \cap A$  und  $A \cup B = B \cup A$ .

(iv)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  und  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ .

(v)  $(A \cap B) \cup A = A$  und  $(A \cup B) \cap A = A$ .

(vi)  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$  und  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ .

(vii)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  und  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

BEWEIS. (i) Für  $\emptyset \subseteq X$  müssen wir zeigen, dass

$$\forall x (x \in \emptyset \Rightarrow x \in X).$$

Sei  $x$ , sodass  $x \in \emptyset$ . Weil das nach Definition von  $\emptyset$  unmöglich ist, folgt trivial, dass die Implikation

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in X$$

wahr ist. Weil  $x$  ein beliebiges Objekt ist, ist der Beweis vollständig. Für  $X \subseteq X$  arbeiten wir auf eine ähnliche Art und wir verwenden die Tatsache, dass die Implikation

$$x \in X \Rightarrow x \in X$$

wahr ist.

(v) Wir zeigen nur die Gleichung  $(A \cup B) \cap A = A$ . Zuerst zeigen wir die Inklusion  $(A \cup B) \cap A \subseteq A$ . Wenn  $b \in (A \cup B) \cap A$ , zeigen wir, dass  $b \in A$ . Nach Definition der Schnittmenge gilt  $b \in (A \cup B)$  und  $b \in A$ . Daraus folgt  $b \in A$ . Als nächstes zeigen wir die Inklusion  $A \subseteq (A \cup B) \cap A$ . Wenn  $a \in A$ , zeigen wir, dass  $a \in (A \cup B) \cap A$ , d.h.  $a \in A \cup B$  und  $a \in A$ . Beide Inklusionen folgen einfach aus der Hypothese  $a \in A$ .

(ii)-(iv) und (vi) -(vii) Aufgabe. □

SATZ 1.1.6. Sei  $X$  eine Menge und  $A, B$  Teilmengen von  $X$ .

(i)  $\emptyset' = X$  und  $X' = \emptyset$ .

(ii)  $A \cap A' = \emptyset$  und  $A \cup A' = X$ .

$$(iii) (A')' = A.$$

$$(iv) (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

$$(v) (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

$$(vi) A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'.$$

BEWEIS. (i) Nach der Definition des Komplements gelten

$$\emptyset' = \{x \in X \mid x \notin \emptyset\} = X,$$

$$X' = \{x \in X \mid x \notin X\} = \emptyset.$$

(ii) Nach den Definitionen der Schnittmenge und der Vereinigungsmenge gelten

$$\begin{aligned} A \cap A' &= \{x \in X \mid x \in A \ \& \ x \in A'\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A \ \& \ x \notin A\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup A' &= \{x \in X \mid x \in A \text{ oder } x \in A'\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A \text{ oder } x \notin A\} \\ &= X. \end{aligned}$$

(iii) Nach der Definition des Komplements gilt

$$\begin{aligned} (A')' &= \{x \in X \mid x \notin A'\} \\ &= \{x \in X \mid \text{nicht}(\text{nicht } x \in A)\} \\ &= A. \end{aligned}$$

(iv) -(vi) Aufgabe. □

DEFINITION 1.1.7. Seien  $X, Y$  Mengen. Das *kartesische Produkt*, oder das *Produkt*  $X \times Y$  von  $X, Y$  ist die Menge aller Paaren  $(x, y)$  mit  $x \in X$  und  $y \in Y$ , d.h.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \ \& \ y \in Y\},$$

wobei

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \ \& \ y = y',$$

für alle  $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ .

## 1.2. Funktionen

DEFINITION 1.2.1. Seien  $X, Y$  Mengen. Eine *Funktion*, oder eine *Abbildung*,  $f : X \rightarrow Y$  von  $X$  nach  $Y$  ist eine Regel die jedem Element (input)  $x \in X$  ein einziges Element (output)  $f(x) \in Y$  zuordnet. Das Element  $f(x)$  heißt der *Wert* von  $f$  auf  $x$ . Um zu bezeichnen, dass durch  $f$   $x$  auf  $f(x)$  abbildet wird, schreiben wir

$$x \mapsto f(x).$$

Um zu bezeichnen, dass jedem Element von  $X$  ein eindeutiges Element von  $Y$  zugeordnet wird, schreiben wir

$$x = x' \Rightarrow f(x) = f(x'),$$

für alle  $x, x' \in X$ . Die Menge  $X$  heißt *Definitionsmenge* von  $f$ , und die Menge  $Y$  *Zielmenge* von  $f$ . Die *Wertemenge*  $\text{Im}(f)$  von  $f$  ist die Menge aller Werte von  $f$ , d.h.

$$\text{Im}(f) = \{y \in Y \mid \exists_{x \in X} (y = f(x))\}.$$

Wenn  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : X \rightarrow Y$ , dann sind  $f, g$  *gleich*, genau dann wenn  $f$  und  $g$  gleich sind für jedes  $x \in X$ , d.h.

$$f = g \Leftrightarrow \forall_{x \in X} (f(x) = g(x)).$$

Offensichtlich gilt

$$\text{Im}(f) \subseteq Y.$$

BEISPIEL 1.2.2. Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definiert durch

$$n \mapsto 2n; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach Definition gelten  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 2$ , and  $f(50) = 100$ . Es gilt  $\text{Im}(f) = \text{Even}$ .

DEFINITION 1.2.3. Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  ist eine *Injektion*, oder *injektiv*, wenn für alle  $x, x' \in X$  gilt

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  ist eine *Surjektion*, oder *surjektiv*, wenn  $\text{Im}(f) = Y$ . Eine Funktion  $f$  ist eine *Bijektion*, oder *bijektiv*, wenn  $f$  eine Injektion und eine Surjektion ist.

Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  ist injektiv, genau dann wenn für alle  $x, x' \in X$  gilt

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'),$$

d.h. wenn  $f$  ungleichen inputs ungleiche outputs zuordnet.

BEISPIEL 1.2.4. Die Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , definiert durch  $n \mapsto 2n$ ;  $n \in \mathbb{N}$ , ist injektiv, weil  $2n = 2m \Rightarrow n = m$ , für alle  $n, m \in \mathbb{N}$ , aber sie ist nicht surjektiv, da  $\text{Im}(f) = \text{Even} \subsetneq \mathbb{N}$ .

DEFINITION 1.2.5. Sei  $X$  eine Menge. Die *identische Abbildung*  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  ist definiert durch die Regel

$$x \mapsto x; \quad x \in X.$$

Offensichtlich ist  $\text{id}_X$  eine Bijektion.

BEISPIEL 1.2.6. Sei  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  definiert durch

$$g(z) := \begin{cases} z & , z \geq 0 \\ -z & , z < 0. \end{cases}$$

Es gilt  $g$  ist surjektiv, weil  $g(n) = n$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ , aber  $g$  ist nicht injektiv, da z.B.  $g(-1) = g(1) = 1$ .

DEFINITION 1.2.7. Seien  $X, Y$  Mengen, und sei  $y_0 \in Y$ . Die Funktion  $\hat{y}_0: X \rightarrow Y$ , definiert durch

$$x \mapsto y_0; \quad x \in X,$$

ist die *konstante Funktion* von  $X$  nach  $Y$  mit dem konstanten Wert  $y_0$ .

DEFINITION 1.2.8. Seien  $X, Y, Z$  Mengen,  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$ . Die *Komposition*  $g \circ f: X \rightarrow Z$  von  $f$  und  $g$  ist definiert durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)); \quad x \in X$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z. \\ & \searrow & \text{---} & \nearrow & \\ & & g \circ f & & \end{array}$$

Weil  $g$  und  $f$  gleichen inputs gleiche outputs zuordnen, ordnet auch die Komposition  $g \circ f$  gleichen inputs gleiche outputs zu, d.h.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(w)) = (g \circ f)(w),$$

wobei  $x, w \in X$  mit  $x = w$ .

BEISPIEL 1.2.9. Sei  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definiert durch  $f(n) = n + 1$ , für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , und sei  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definiert durch  $g(n) = n^2$ , für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Es gelten  $g \circ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , und

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = (n + 1)^2,$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

SATZ 1.2.10. Seien  $X, Y, Z, W$  Mengen,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$ , und  $h : Z \rightarrow W$ . Es gelten:

(i)  $f \circ \text{id}_X = f$

$$X \xrightarrow{\text{id}_X} X \xrightarrow{f} Y.$$

(ii)  $\text{id}_Y \circ f = f$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\text{id}_Y} Y.$$

(iii)  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W.$$

BEWEIS. (i) Nach Definition der Gleichheit von Funktionen, müssen wir zeigen, dass

$$\forall x \in X ((f \circ \text{id}_X)(x) = f(x)).$$

Wenn  $x \in X$ , dann gilt

$$(f \circ \text{id}_X)(x) = f(\text{id}_X(x)) = f(x).$$

Weil  $x$  ein beliebiges Element von  $X$  ist, folgt  $f \circ \text{id}_X = f$ .

(ii) und (iii) Aufgabe. □

### 1.3. Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion (IND) ist ein wichtiges Prinzip der natürlichen Zahlen. Das Prinzip IND ist die häufigste Beweismethode für eine Allaussage (oder Universalaussage)

$$\forall n \in \mathbb{N} (\phi(n)),$$

d.h. "für alle natürlichen Zahlen  $n$  die Eigenschaft  $\phi(n)$  ist wahr".

**Vollständige Induktion** IND: Sei  $\phi(n)$  eine mathematische Formel auf  $\mathbb{N}$ , sodass folgendes gilt:

(i)  $\phi(0)$  ist wahr (Induktionsanfang).

(ii) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , aus der Aussage (der Induktionsannahme)  $\phi(n)$  folgt stets die Aussage  $\phi(n+1)$ , d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} (\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1)).$$

Dann ist die Aussageform  $\phi(n)$  allgemeingültig, d.h.  $\phi(n)$  ist wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir können das Prinzip IND wie folgt schreiben:

$$(IND) \quad [\phi(0) \ \& \ \forall n \in \mathbb{N} (\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} (\phi(n)).$$

BEISPIEL 1.3.1. Wir beweisen die folgende Allaussage

$$\forall n \in \mathbb{N} \left( (1 + 2020)^n \geq 1 + n \cdot 2020 \right)$$

mithilfe des Prinzips IND.

BEWEIS. Sei  $\phi(n)$  die folgende Formel auf  $\mathbb{N}$ :

$$\phi(n) :\Leftrightarrow (1 + 2020)^n \geq 1 + n \cdot 2020.$$

**Schritt 1:** Wir zeigen, dass  $\phi(0)$  wahr ist:

$$\phi(0) :\Leftrightarrow (1 + 2020)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 \cdot 2020.$$

**Schritt 2:** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir zeigen die Implikation:

$$\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1) \quad \text{d.h.}$$

$$\left[ (1 + 2020)^n \geq 1 + n \cdot 2020 \right] \Rightarrow \left[ (1 + 2020)^{n+1} \geq 1 + (n+1)2020 \right].$$

Angenommen

$$(1 + 2020)^n \geq 1 + n \cdot 2020,$$

zeigen wir die Ungleichung

$$(1 + 2020)^{n+1} \geq 1 + (n+1)2020 = 1 + n \cdot 2020 + 2020$$

wie folgt:

$$\begin{aligned} (1 + 2020)^{n+1} &= (1 + 2020)^n (1 + 2020) \\ &\geq (1 + n \cdot 2020)(1 + 2020) \\ &= 1 + n \cdot 2020 + 2020 + n \cdot 2020^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq 1 + n \cdot 2020 + 2020 \\ &= 1 + (n + 1)2020. \end{aligned} \quad \square$$

Sei  $\mathbb{N}^+$  die Menge der natürlichen Zahlen die ungleich 0 sind d.h.

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Das Prinzip IND ist äquivalent zu dem folgenden Prinzip  $\text{IND}^+$ .

**Vollständige Induktion**  $\text{IND}^+$ : Sei  $\phi(n)$  eine mathematische Formel auf  $\mathbb{N}^+$ , sodass folgendes gilt:

- (i)  $\phi(1)$  ist wahr (Induktionsanfang).
- (ii) Für jedes  $n \in \mathbb{N}^+$ , aus der Aussage (der Induktionsannahme)  $\phi(n)$  folgt stets die Aussage  $\phi(n + 1)$ , d.h.

$$\forall_{n \in \mathbb{N}^+} (\phi(n) \Rightarrow \phi(n + 1)).$$

Dann ist die Aussageform  $\phi(n)$  allgemeingültig, d.h.  $\phi(n)$  ist wahr für alle  $n \in \mathbb{N}^+$ .

Wir können das Prinzip  $\text{IND}^+$  wie folgt schreiben:

$$(\text{IND}^+) \quad [\phi(1) \ \& \ \forall_{n \in \mathbb{N}^+} (\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1))] \Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}^+} (\phi(n)).$$

BEISPIEL 1.3.2. Wir beweisen die folgende Allaussage

$$\forall_{n \in \mathbb{N}^+} \left( 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

mithilfe des Prinzips  $\text{IND}^+$ .

BEWEIS. Sei  $\phi(n)$  die folgende Formel auf  $\mathbb{N}^+$ :

$$\phi(n) :\Leftrightarrow 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Schritt 1:** Wir zeigen, dass  $\phi(1)$  wahr ist:

$$\phi(1) :\Leftrightarrow 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2}.$$

**Schritt 2:** Sei  $n \in \mathbb{N}^+$ . Wir zeigen die Implikation:

$$\phi(n) \Rightarrow \phi(n + 1), \quad \text{d.h.}$$

$$\left[ 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right] \Rightarrow \left[ 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right].$$

Angenommen

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

zeigen wir die Gleichheit

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

wie folgt:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= [1 + 2 + \dots + n] + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

DEFINITION 1.3.3. Seien  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ . Wir definieren die Summe

$$\sum_{k=1}^1 a_k = a_1,$$

und für  $n > 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) + a_n \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n \\ &= a_1 + \dots + a_n. \end{aligned}$$

Zum Beispiel, wenn  $a_1 = a_2 = \dots = a_5 = 2$ , dann

$$\sum_{k=1}^5 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10.$$

Gleichfalls

$$\sum_{k=1}^n m = nm,$$

und

$$\sum_{k=1}^n k = n^2.$$

Deshalb schreiben wir die Gleichheit

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

wie folgt:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

BEISPIEL 1.3.4. Wir beweisen die folgende Allaussage

$$\forall_{n \in \mathbb{N}^+} \left( 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

mithilfe des Prinzips  $\text{IND}^+$ .

BEWEIS. Sei  $\phi(n)$  die folgende Formel auf  $\mathbb{N}^+$ :

$$\phi(n) : \Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Schritt 1:** Wir zeigen, dass  $\phi(1)$  wahr ist:

$$\phi(1) : \Leftrightarrow 1^2 = 1 = \frac{6}{6} = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}.$$

**Schritt 2:** Sei  $n \in \mathbb{N}^+$ . Wir zeigen die Implikation:

$$\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1) \quad \text{d.h.}$$

$$\begin{aligned} & \left[ 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left[ 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} \right]. \end{aligned}$$

Angenommen

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

zeigen wir die Gleichheit

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

wie folgt:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6]}{6} \\
&= \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} \\
&= \frac{(n+1)[2n^2 + 4n + 3n + 6]}{6} \\
&= \frac{(n+1)[2n(n+2) + 3(n+2)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \quad \square
\end{aligned}$$

SATZ 1.3.5. Sei  $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$  mit  $a = f(1)$ . Angenommen

$$f(n+m) = f(n)f(m),$$

für jede  $n, m \in \mathbb{N}^+$ . Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ (f(n) = a^n).$$

BEWEIS. Wir verwenden das Induktionsprinzip  $\text{IND}^+$  für die Formel

$$\phi(n) : \Leftrightarrow f(n) = a^n.$$

**Schritt 1:**  $\phi(1) : \Leftrightarrow f(1) = a^1 = a$ .

**Schritt 2:** Sei  $n \in \mathbb{N}^+$ . Wir zeigen die Implikation

$$\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1),$$

d.h.

$$[f(n) = a^n] \Rightarrow [f(n+1) = a^{n+1}]$$

wie folgt:

$$f(n+1) = f(n)f(1) = a^n f(1) = a^n a = a^{n+1}. \quad \square$$

### 1.4. Die rationalen Zahlen

LEMMA 1.4.1. Seien  $k, l \in \mathbb{N}$ . Es gelten:

- (i)  $k \in \text{Even} \Rightarrow k^2 \in \text{Even}$ .
- (ii)  $k \in \text{Odd} \Rightarrow k^2 \in \text{Odd}$ .
- (iii)  $k^2 \in \text{Even} \Rightarrow k \in \text{Even}$ .
- (iv)  $k^2 \in \text{Odd} \Rightarrow k \in \text{Odd}$ .
- (v)  $k \in \text{Even} \Rightarrow kl \in \text{Even}$ .
- (vi)  $k, l \in \text{Odd} \Rightarrow kl \in \text{Odd}$ .

BEWEIS. (i) Wenn  $k = 2n$  für  $n \in \mathbb{N}$ , dann gilt

$$k^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2) \in \text{Even}.$$

(ii) Wenn  $k = 2n + 1$  für  $n \in \mathbb{N}$ , dann gilt

$$k^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2[2n^2 + 2n] + 1 \in \text{Odd}.$$

(iii) Wenn  $k^2 \in \text{Even}$  und  $k \in \text{Odd}$ , dann folgt aus (ii)  $k^2 \in \text{Odd}$ , was ein Widerspruch ist.

(iv) Wenn  $k^2 \in \text{Odd}$  und  $k \in \text{Even}$ , dann folgt aus (i)  $k^2 \in \text{Even}$ , was ein Widerspruch ist.

(v)-(vi) Aufgabe. □

DEFINITION 1.4.2. Sei  $\mathbb{Q}$  die Menge der rationalen Zahlen, definiert durch

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{k}{l} \mid k \in \mathbb{Z} \ \& \ l \in \mathbb{Z}^* \right\},$$

wobei

$$\mathbb{Z}^* = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \neq 0\}.$$

Es gilt  $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$ , weil  $z = \frac{z}{1}$ , für jedes  $z \in \mathbb{Z}$ , und  $\frac{1}{2}$  ist in  $\mathbb{Q}$  aber nicht in  $\mathbb{Z}$ .

LEMMA 1.4.3. Es gibt keine rationale Zahl  $q$  mit  $q^2 = 2$ .

BEWEIS. Sei  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $q^2 = 2$ , und seien  $k \in \mathbb{Z}$  und  $l \in \mathbb{Z}^*$  mit

$$q = \frac{k}{l}.$$

Ohne Verlust der Allgemeinheit sei  $q > 0$  und seien  $k \in \mathbb{N}$ ,  $l \in \mathbb{N}^*$ , sodass  $k, l$  sind nicht gleichzeitig in **Even** (warum ist das möglich?). Wenn  $k^2 = 2l^2$ , dann gilt  $k^2 \in \text{Even}$ , also gilt  $k \in \text{Even}$ . Sei  $k = 2m$  für  $m \in \mathbb{N}^+$ . Weil  $k^2 = 4m^2 = 2l^2$ , dann gilt  $l^2 = 2m^2$ , also gelten  $l^2 \in \text{Even}$  und  $l \in \text{Even}$ , was ein Widerspruch ist. □

### 1.5. Die reellen Zahlen

Sei  $\mathbb{R}$  die Menge aller reellen Zahlen. Die Axiome für  $\mathbb{R}$  sind die folgenden:

- (I) Axiome der Addition.
- (II) Axiome der Multiplikation.
- (III) Das Distributivgesetz.
- (IV) Die Anordnungs-Axiome.
- (V) Das Vollständigkeits-Axiom.

**(I) Axiome der Addition:** Es gibt eine Abbildung  $+$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x + y,$$

sodass gilt:

(Add<sub>1</sub>) [Assoziativgesetz]  $x + (y + z) = (x + y) + z$ , für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

(Add<sub>2</sub>) [Existenz der Null] Es gibt eine Zahl  $0 \in \mathbb{R}$ , sodass  $0 + x = x$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(Add<sub>3</sub>) [Existenz des Negativen] Zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  existiert eine reelle Zahl  $-x \in \mathbb{R}$ , sodass  $x + (-x) = 0$ .

(Add<sub>4</sub>) [Kommutativgesetz]  $x + y = y + x$ , für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Die Zahl 0 ist durch ihre Eigenschaft eindeutig bestimmt: Sei  $0' \in \mathbb{R}$ , sodass gilt  $0' + x = x$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Nach den Axiomen (Add<sub>2</sub>) und (Add<sub>4</sub>) folgt daraus

$$0 = 0' + 0 = 0 + 0' = 0'.$$

Das Negative einer Zahl  $x \in \mathbb{R}$  ist eindeutig bestimmt: Sei  $y \in \mathbb{R}$ , sodass gilt  $x + y = 0$ . Nach den Axiomen (Add<sub>1</sub>), (Add<sub>2</sub>) und (Add<sub>4</sub>) folgt daraus

$$(-x) = 0 + (-x) = (x + y) + (-x) = (y + x) + (-x) = y + (x + (-x)) = y + 0 = y.$$

DEFINITION 1.5.1. Für  $x, y \in \mathbb{R}$  setz man

$$x - y = x + (-y).$$

DEFINITION 1.5.2. Für  $n \geq 1$  und  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  setz man

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1,$$

und für  $n > 1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) + x_{n+1}.$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + \dots + x_n.$$

**(II) Axiome der Multiplikation:** Es gibt eine Abbildung  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x \cdot y,$$

sodass gilt:

(Mult<sub>1</sub>) [Assoziativgesetz]  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ , für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

(Mult<sub>2</sub>) [Existenz der Eins] Es gibt ein Element  $1 \in \mathbb{R}$ ,  $1 \neq 0$ , sodass gilt  $1 \cdot x = x$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(Mult<sub>3</sub>) [Existenz des Inversen] Zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq 0$  gibt es ein  $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ , sodass gilt  $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ .

(Mult<sub>4</sub>) [Kommutativgesetz]  $x \cdot y = y \cdot x$ , für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Wir schreiben auch  $xy$  statt  $x \cdot y$ . Die Zahl 1 ist durch ihre Eigenschaft eindeutig bestimmt, und das Inverse einer reellen Zahl  $x \neq 0$  ist eindeutig bestimmt.

DEFINITION 1.5.3. Für  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $y \neq 0$  setzt man

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}.$$

DEFINITION 1.5.4. Seien  $n \geq 1$  und  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Wir definieren

$$\prod_{i=1}^1 x_i = x_1,$$

und für  $n > 1$

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i = \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) \cdot x_{n+1}.$$

Es gilt

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot \dots \cdot x_n.$$

DEFINITION 1.5.5. Ist  $a \in \mathbb{R}$ , so werden die Potenzen  $a^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  wie folgt definiert

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ a^{n-1}a & , n > 0. \end{cases}$$

Es gilt

$$a^n = \prod_{i=1}^n a.$$

Ist  $a \neq 0$ , so definiert man negative Potenzen  $a^{-n}$  ( $n > 0$ ) durch

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

SATZ 1.5.6. Für die Potenzen gelten folgende Rechenregeln:

$$a^{m+n} = a^m a^n,$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$a^n b^n = (ab)^n.$$

BEWEIS. Aufgabe. □

### (III) Distributivgesetz:

(Distr)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ , für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

SATZ 1.5.7. Seien  $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ . Es gelten:

(i)  $0 \cdot x = 0$ .

(ii)  $(-x)y = -(xy)$ .

(iii)  $(-x)(-y) = xy$ .

(iv)  $-(x + y) = -x - y$ .

(v) Wenn  $x, y \neq 0$ , dann gilt  $xy \neq 0$ , und  $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ .

(vi) Wenn  $z, w \neq 0$ , dann gilt

$$\frac{x}{z} \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw} \quad \& \quad \frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}.$$

(vii) Wenn  $x \neq 0$  und  $xy = xz$ , dann gilt  $y = z$ .

BEWEIS. Aufgabe. □

### 1.6. Die Anordnungs-Axiome

**(IV) Die Anordnungs-Axiome:** In  $\mathbb{R}$  sind gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet (Schreibweise  $x > 0$ ), sodass folgende Axiome erfüllt sind.

(Anord<sub>1</sub>) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt genau eine der drei Beziehungen

$$x > 0 \text{ oder } x = 0 \text{ oder } -x > 0.$$

(Anord<sub>2</sub>) Wenn  $x > 0$  und  $y > 0$ , dann gilt  $x + y > 0$  und  $x \cdot y > 0$  (Summe und Produkt positiver Elemente sind wieder positiv).

DEFINITION 1.6.1. Für reelle Zahlen  $x, y$  definiert man

$$x > y \Leftrightarrow x - y > 0,$$

$$y < x \Leftrightarrow x > y,$$

$$x < 0 \Leftrightarrow (-x) > 0,$$

$$x \geq y \Leftrightarrow x > y \text{ oder } x = y,$$

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ oder } x = y.$$

SATZ 1.6.2. Seien  $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ . Es gelten:

- (i)  $1 > 0$ .
- (ii)  $n \cdot 1 > 0$ , für alle  $n \in \mathbb{N}^+$ .
- (iii) Wenn  $x, y < 0$ , dann gilt  $xy > 0$ .
- (iv) Wenn  $x > 0$  und  $y < 0$ , dann gilt  $xy < 0$ .
- (v) Wenn  $x \neq 0$ , dann gilt  $x^2 > 0$ .
- (vi) Wenn  $x > 0$ , dann gilt  $\frac{1}{x} > 0$ .
- (vii) Wenn  $x < y$  und  $y < z$ , dann gilt  $x < z$ .
- (viii) Wenn  $x < y$ , dann gilt  $x + z < y + z$ .
- (ix) Wenn  $x < y$  und  $z > 0$ , dann gilt  $xz < yz$ .
- (x) Wenn  $x < y$  und  $z < 0$ , dann gilt  $xz > yz$ .
- (xi) Wenn  $x < y$  und  $x, y > 0$ , dann gilt  $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ .
- (xii) Wenn  $xy = 0$ , dann gilt  $x = 0$  oder  $y = 0$ .

BEWEIS. Aufgabe.

□

DEFINITION 1.6.3. Sei die Abbildung  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$x \mapsto |x|,$$

wobei

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

ist der *Absolut-Betrag* von  $x$ .

SATZ 1.6.4. Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Es gelten:

- (i)  $|x| = \max\{x, -x\}$ .
- (ii)  $|x| \geq 0$ .
- (iii)  $x \leq |x|$  und  $-x \leq |x|$ .
- (iv)  $|x| = |-x|$ .
- (v)  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
- (vi)  $|xy| = |x||y|$ .
- (vii)  $|x|^2 = x^2$ .
- (viii) [Dreiecks-Ungleichung]  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

BEWEIS. (vi) Es gilt

$$|xy| = \begin{cases} xy & , xy \geq 0 \Leftrightarrow x, y \geq 0 \text{ oder } x, y \leq 0 \\ -(xy) & , xy < 0 \Leftrightarrow [x > 0 \ \& \ y < 0] \text{ oder } [x < 0 \ \& \ y > 0] \end{cases}$$

und

$$|x||y| = \begin{cases} xy & , x \geq 0 \ \& \ y \geq 0 \\ -xy & , x \geq 0 \ \& \ y < 0 \\ -xy & , x < 0 \ \& \ y \geq 0 \\ (-x)(-y) = xy & , x < 0 \ \& \ y < 0. \end{cases}$$

(vii) Es gilt

$$|x|^2 = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ (-x)^2 = x^2 & , x < 0. \end{cases}$$

(viii) Aus (iii) folgt  $x \leq |x|$  und  $y \leq |y|$ . Es gilt

$$x + y \leq |x| + |y|.$$

Aus (iii) folgt  $-x \leq |x|$  und  $-y \leq |y|$ . Es gilt

$$(-x) + (-y) = -(x + y) \leq |x| + |y|.$$

Aus (i) folgt  $|x + y| = \max\{x + y, -(x + y)\} \leq |x| + |y|$ . □

**Das Archimedische Axiom** (Arch): Zu je zwei reellen Zahlen  $x, y > 0$  existiert eine natürliche Zahl  $n$  mit  $nx > y$

$$(\text{Arch}) \quad \forall_{x,y \in \mathbb{R}} \left( [x > 0 \ \& \ y > 0] \Rightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}} (nx > y) \right).$$

**COROLLAR 1.6.5.** *Zu jeder reellen Zahl  $x$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , sodass gilt  $x < n$  &  $-n < x$ .*

**BEWEIS.** (i) Wenn  $x = 0$ , dann nehmen wir  $n = 1$ .

(ii) Wenn  $x > 0$ , dann folgt aus (Arch) für  $x$  und  $1$ , dass es  $n \in \mathbb{N}$  gibt mit  $n > x$ , also gilt  $-n < 0 < x < n$ .

(iii) Wenn  $x < 0$ , dann gilt  $-x > 0$ . Aus (ii) folgt  $-x < n$  &  $-n < (-x)$ , für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Also gilt  $x < n$  &  $-n < x$ .  $\square$

**COROLLAR 1.6.6.** *Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert eine natürliche Zahl  $n > 0$  mit*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

**BEWEIS.** Wenn  $\varepsilon > 0$ , dann gilt  $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ . Nach Corollar 1.6.5 existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Daher folgt  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ .  $\square$

## 1.7. Folgen reeller Zahlen

**DEFINITION 1.7.1.** Unter einer Folge reeller Zahlen versteht man eine Abbildung  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Jedem  $n \in \mathbb{N}$  ist also ein

$$\alpha_n := \alpha(n) \in \mathbb{R}$$

zugeordnet. Man schreibt hierfür

$$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ oder } (\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \text{ oder } (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots).$$

**BEISPIEL 1.7.2. (i)** Sei  $x \in \mathbb{R}$ , und sei  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\alpha_n = x,$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Man erhält die konstante Folge

$$(x, x, x, \dots).$$

**(ii)** Sei  $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\beta_n = \frac{1}{n+1},$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Man erhält die Folge

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right).$$

(iii) Sei  $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\gamma_n = (-1)^n,$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Man erhält die Folge

$$(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots).$$

(iv) Sei  $\delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\delta_n = \frac{n}{n+1},$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Man erhält die Folge

$$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right).$$

(v) Sei  $\zeta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\zeta_n = \frac{n}{2^n},$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Man erhält die Folge

$$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}, \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}, \dots\right).$$

(vi) Die Folge der *Fibonacci-Zahlen*  $\text{Fib} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$\text{Fib}_n = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ 1 & , n = 1 \\ \text{Fib}_{n-1} + \text{Fib}_{n-2} & , n \geq 2. \end{cases}$$

Man erhält die Folge

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots).$$

(vii) Sei  $x \in \mathbb{R}$ , und sei  $\eta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\eta_n = x^n,$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Man erhält die Folge

$$(1, x, x^2, x^3, x^4, \dots).$$

DEFINITION 1.7.3. Sei  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heisst *konvergent* gegen  $x \in \mathbb{R}$ , falls gilt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , sodass gilt  $|\alpha_n - x| < \varepsilon$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N_\varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon (|\alpha_n - x| < \varepsilon).$$

Konvergiert  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$ , so nennt man  $x$  den *Grenzwert* oder den *Limes* der Folge und schreibt

$$\alpha_n \xrightarrow{n} x, \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x, \quad \text{oder} \quad \lim \alpha_n = x.$$

Für  $\varepsilon > 0$  versteht man unter der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x \in \mathbb{R}$  die Menge aller Punkte der Zahlengeraden, die von  $x$  einen Abstand kleiner als  $\varepsilon$  haben. Dies ist das Intervall

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid x - \varepsilon < y < x + \varepsilon\}.$$

Die Konvergenz-Bedingung lässt sich nun so formulieren: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , sodass gilt

$$\alpha_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon),$$

für alle  $n \geq N_\varepsilon$ .

DEFINITION 1.7.4. Eine folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen, die nicht konvergiert, heisst *divergent*. Eine folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen heisst *beschränkt*, wenn es eine Konstante  $M > 0$  gibt, sodass gilt

$$|\alpha_n| \leq M,$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

SATZ 1.7.5. Jede konvergente Folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt.

BEWEIS. Sei  $\alpha_n \xrightarrow{n} x$ . Dann gibt es ein  $N_1 \in \mathbb{N}$ , sodass gilt

$$\forall n \geq N_1 (|\alpha_n - x| < 1).$$

Daraus folgt

$$|\alpha_n| = |\alpha_n - x + x| \leq |\alpha_n - x| + |x| < 1 + |x|,$$

für alle  $n \geq N_1$ . Wir setzen

$$M = \max \{|\alpha_0|, \dots, |\alpha_{N_1-1}|, 1 + |x|\}.$$

Damit gilt  $|\alpha_n| \leq M$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Behandlung des Beispiels 1.7.2:**

(i) Die konstante Folge  $(x, x, x, \dots)$  konvergiert gegen  $x$ : Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir setzen  $N_\varepsilon = 0$ . Es gilt

$$\forall n \geq 0 (|\alpha_n - x| = |x - x| = 0 < \varepsilon).$$

(ii)  $\beta_n \xrightarrow{n} 0$ : Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$  mit

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Damit ist

$$\forall n \geq N_\varepsilon - 1 \left( |\beta_n - 0| = |\beta_n| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon \right).$$

(iii) Die Folge  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert (Aufgabe).

(iv)  $\delta_n \xrightarrow{n} 1$ : Es gilt

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

für alle  $n \geq N$ , wobei  $N \in \mathbb{N}^+$  mit  $N > \frac{1}{\varepsilon}$ .

(v)  $\zeta_n \xrightarrow{n} 0$  (Aufgabe).

(vi) Die Folge  $(\text{Fib}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert (Aufgabe).

(vii) Das Konvergenzverhalten der Folge  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  hängt vom Wert von  $x$  ab. Wir unterscheiden vier Fälle.

(a) Für  $|x| < 1$  gilt  $x^n \xrightarrow{n} 0$  (Aufgabe).

(b) Für  $x = 1$  ist  $x^n = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , also  $x^n \xrightarrow{n} 1$ .

(c) Für  $x = -1$  divergiert die Folge  $(x^n)$  (Beispiel (iii)).

(d) Für  $|x| > 1$  divergiert die Folge  $(x^n)$ , weil die Folge  $(x^n)$  unbeschränkt ist (Aufgabe).

**SATZ 1.7.6.** Seien  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen reeller Zahlen, und  $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$ . Seien die Folgen reeller Zahlen

$$(\alpha + \beta)_{n \in \mathbb{N}}, (\alpha \cdot \beta)_{n \in \mathbb{N}}, (\lambda \alpha)_{n \in \mathbb{N}},$$

definiert durch

$$(\alpha + \beta)_n = \alpha_n + \beta_n,$$

$$(\alpha \cdot \beta)_n = \alpha_n \cdot \beta_n,$$

$$(\lambda \alpha)_n = \lambda \alpha_n,$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wenn  $\beta_n \neq 0$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ , sei die Folge reeller Zahlen

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)_{n \in \mathbb{N}},$$

definiert durch

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)_n = \frac{1}{\beta_n},$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wenn  $\alpha_n \xrightarrow{n} x$  und  $\beta_n \xrightarrow{n} y$ , dann gilt das folgende:

(i)  $(\alpha + \beta)_n \xrightarrow{n} x + y$ .

(ii)  $(\alpha \cdot \beta)_n \xrightarrow{n} x \cdot y$ .

(iii)  $(\lambda\alpha)_n \xrightarrow{n} \lambda x$ .

(iv) Wenn  $y \neq 0$ , dann gibt es  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass gilt  $\beta_n \neq 0$ , für alle  $n \geq n_0$ , und

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)_{n+n_0} \xrightarrow{n} \frac{1}{y},$$

und

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{n+n_0} \xrightarrow{n} \frac{x}{y}.$$

BEWEIS. Nach Definition 1.7.3

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon^\alpha \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon^\alpha (|\alpha_n - x| < \varepsilon).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon^\beta \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon^\beta (|\beta_n - y| < \varepsilon).$$

(i) Nach der Dreiecks-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} |(\alpha + \beta)_n - (x + y)| &= |\alpha_n + \beta_n - x - y| \\ &= |(\alpha_n - x) + (\beta_n - y)| \\ &\leq |\alpha_n - x| + |\beta_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

für alle  $n \geq N_\varepsilon^{\alpha+\beta} = \max\{N_{\frac{\varepsilon}{2}}^\alpha, N_{\frac{\varepsilon}{2}}^\beta\}$ .

(ii) Sei  $M > 0$  eine Schranke von  $\alpha$ . Es gilt

$$\begin{aligned} |(\alpha \cdot \beta)_n - xy| &= |\alpha_n \beta_n - xy| \\ &= |\alpha_n \beta_n - \alpha_n y + \alpha_n y - xy| \\ &= |(\alpha_n \beta_n - \alpha_n y) + (\alpha_n y - xy)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\alpha_n(\beta_n - y)| + |(\alpha_n - x)y| \\
&= |\alpha_n||\beta_n - y| + |\alpha_n - x||y| \\
&\leq M|\beta_n - y| + |\alpha_n - x||y| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + |y|\frac{\varepsilon}{2(|y| + 1)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

für alle  $n \geq N_\varepsilon^{\alpha, \beta} = \max\{N_{\frac{\varepsilon}{2M}}^\beta, N_{\frac{\varepsilon}{2(|y|+1)}}^\alpha\}$ .

(iii) Aufgabe.

(iv) Weil  $\beta_n \xrightarrow{n} y$  gilt

$$|\beta_n - y| < \frac{|y|}{2},$$

für alle  $n \geq n_0 = N_{\frac{|y|}{2}}^\beta$ . Also für jedes  $n \geq n_0$  gilt

$$-|\beta_n - y| > -\frac{|y|}{2}.$$

Nach Blatt 2, Aufgabe 3(iii) gilt

$$|x - y| \geq ||x| - |y|| \geq |x| - |y|.$$

Also für jedes  $n \geq n_0$  gilt

$$\begin{aligned}
|\beta_n| &= |y - (y - \beta_n)| \\
&\geq |y| - |\beta_n - y| \\
&\geq |y| - \frac{|y|}{2} \\
&\geq \frac{|y|}{2} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Darüber hinaus es gilt

$$\begin{aligned}
\left| \left(\frac{1}{\beta}\right)_n - \frac{1}{y} \right| &= \left| \frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{y} \right| \\
&= \left| \frac{y - \beta_n}{\beta_n y} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|\beta_n||y|} |\beta_n - y| \\
&\leq \frac{2}{|y|} \frac{1}{|y|} \left( \frac{\varepsilon|y|^2}{2} \right) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

für alle  $n \geq \max\{n_0, N^{\frac{\beta}{\frac{\varepsilon|y|^2}{2}}}\}$ .

Die Konvergenz

$$\left( \frac{\alpha}{\beta} \right)_{n+n_0} \xrightarrow{n} \frac{x}{y}$$

folgt aus (ii) und die Konvergenz  $\left( \frac{1}{\beta} \right)_{n+n_0} \xrightarrow{n} \frac{1}{y}$ . □

BEISPIEL 1.7.7. (i) Wir betrachten als Beispiel die Folge

$$\alpha_n = \frac{4n^2 + 14n}{n^2 - 2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für  $n > 0$  kann man schreiben

$$\alpha_n = \frac{n^2(4 + 14\frac{1}{n})}{n^2(1 - 2\frac{1}{n^2})} = \frac{4 + 14\frac{1}{n}}{1 - 2\frac{1}{n^2}}.$$

Es gilt  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$ , also gilt  $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$  und  $14\frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$ ,  $-2\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n} 0$ . Also gilt

$$\alpha_n \xrightarrow{n} 4.$$

(ii) Sei die Folge

$$\beta_n = \frac{4n^2 + 14n}{n^3 - 2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für  $n > 0$  kann man schreiben

$$\beta_n = \frac{n^2(4 + 14\frac{1}{n})}{n^3(1 - 2\frac{1}{n^3})} = \frac{1}{n} \left( \frac{4 + 14\frac{1}{n}}{1 - 2\frac{1}{n^3}} \right).$$

Es gilt  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$ , also gilt  $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$  und  $14\frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$ ,  $-2\frac{1}{n^3} \xrightarrow{n} 0$ . Also gilt

$$\frac{4 + 14\frac{1}{n}}{1 - 2\frac{1}{n^3}} \xrightarrow{n} 4,$$

und  $\beta_n \xrightarrow{n} 0$ .

(iii) Sei die Folge

$$\gamma_n = \frac{4n^3 + 14n}{n^2 - 2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für  $n > 0$  kann man schreiben

$$\gamma_n = \frac{n^3(4 + 14\frac{1}{n^2})}{n^2(1 - 2\frac{1}{n^2})} = n \left( \frac{4 + 14\frac{1}{n^2}}{1 - 2\frac{1}{n^2}} \right).$$

Es gilt  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$ , also gilt  $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$  und  $14\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n} 0$ ,  $-2\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n} 0$ . Also gilt

$$\frac{4 + 14\frac{1}{n^2}}{1 - 2\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n} 4,$$

und  $\gamma_n \xrightarrow{n} +\infty$  d.h.  $\gamma$  ist divergent.

**SATZ 1.7.8.** *Seien  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen reeller Zahlen, und seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Angenommen  $\alpha_n \xrightarrow{n} x$ ,  $\beta_n \xrightarrow{n} y$ , und*

$$\alpha_n \leq \beta_n,$$

*für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt auch  $x \leq y$ .*

**BEWEIS.** Sei  $\varepsilon = x - y > 0$ . Für alle  $n \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}}^\alpha$  gilt

$$|\alpha_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < \alpha_n - x < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\varepsilon}{2} < \alpha_n < x + \frac{\varepsilon}{2},$$

also gilt

$$\alpha_n > x - \frac{x - y}{2} = \frac{x + y}{2}.$$

Für alle  $n \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}}^\beta$  gilt

$$|\beta_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < \beta_n - y < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow y - \frac{\varepsilon}{2} < \beta_n < y + \frac{\varepsilon}{2},$$

also gilt

$$\beta_n < y + \frac{x - y}{2} = \frac{x + y}{2}.$$

Somit gilt für alle  $n \geq \max \{N_{\frac{\varepsilon}{2}}^\alpha, N_{\frac{\varepsilon}{2}}^\beta\}$

$$\beta_n < \frac{x + y}{2} < \alpha_n,$$

ein Widerspruch. Also gilt  $x \leq y$ . □

### 1.8. Das Vollständigkeits-Axiom

Mithilfe der bisher behandelten Axiome lässt sich nicht die Existenz von Irrationalzahlen beweisen, denn all diese Axiome (I), (II), (III) und (IV) gelten auch in  $\mathbb{Q}$ . Es ist ein weiteres Axiom nötig, das sogenannte Vollständigkeits-Axiom.

Eine charakteristische Eigenschaft konvergenter Folgen, die formuliert werden kann, ohne den Grenzwert der Folge zu nehmen, wurde von Cauchy entdeckt.

DEFINITION 1.8.1. Eine Folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $C_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ , sodass gilt

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon, \quad \text{für alle } n, m \geq C_\varepsilon$$

d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon \in \mathbb{N}^+ \forall n, m \geq C_\varepsilon (|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon).$$

Eine Folge ist eine Cauchy-Folge, wenn die Folgenglieder untereinander beliebig wenig abweichen, falls nur die Indizes genügend groß sind.

SATZ 1.8.2. Sei  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge reeller Zahlen. Dann ist  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge.

BEWEIS. Sei  $x \in \mathbb{R}$ , sodass gilt  $\alpha_n \xrightarrow{n} x$ . Es gilt

$$|\alpha_n - \alpha_m| = |\alpha_n - x + x - \alpha_m| \leq |\alpha_n - x| + |x - \alpha_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

für alle  $n, m \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}} = C_\varepsilon$ . □

Die Umkehrung von Satz 1.8.2 formulieren wir nun als Axiom.

**Vollständigkeits-Axiom (VA):** In  $\mathbb{R}$  konvergiert jede Cauchy-Folge.

Nun beweisen wir als Anwendung des Vollständigkeits-Axioms die Existenz der Wurzeln positiver reeller Zahlen.

THEOREM 1.8.3. Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  und  $b > 0$ . Sei  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert durch

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= b, \\ \alpha_{n+1} &= \frac{1}{2} \left( \alpha_n + \frac{a}{\alpha_n} \right). \end{aligned}$$

Dann gilt:

- (i)  $\alpha_n > 0$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  
(ii)  $\alpha_n^2 \geq a$ , für alle  $n \geq 1$ .  
(iii)  $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ , für alle  $n \geq 1$ .  
(iv) Sei  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  definiert durch

$$\beta_n = \frac{a}{\alpha_n}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Dann gilt:

- (a)  $\beta_n^2 \leq a$ , für alle  $n \geq 1$ ,  
(b)  $\beta_n \leq \alpha_m$ , für alle  $n, m \geq 1$ , and  
(c)

$$\alpha_n - \beta_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}(\alpha_1 - \beta_1),$$

für alle  $n \geq 1$ .

- (v) Die Folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge.  
(vi) Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_n \xrightarrow{n} x$ . Es gilt  $x \geq 0$  und  $x^2 = a$ .

BEWEIS. (i) Man nutzt das Induktionsprinzip IND.

(ii) Es gilt

$$\alpha_n^2 - a = \frac{1}{4} \left( \alpha_{n-1} + \frac{a}{\alpha_{n-1}} \right)^2 - a \geq 0.$$

(iii) Aus (i) und (ii) folgt

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} \geq 0.$$

(iv)-(vi) Aufgabe. □

Sei die Folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert durch

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, \\ \alpha_{n+1} &= \frac{1}{2} \left( \alpha_n + \frac{2}{\alpha_n} \right). \end{aligned}$$

Nach dem Theorem 1.8.3 folgt

$$\alpha_n \xrightarrow{n} \sqrt{2}.$$

Mithilfe des Induktionsprinzips IND kann man zeigen

$$\forall n \in \mathbb{N} (\alpha_n \in \mathbb{Q})$$

d.h. die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  erfüllt nicht das Vollständigkeits-Axiom.

THEOREM 1.8.4. Sei  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 2$ , und seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  und  $b > 0$ . Sei  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert durch

$$\alpha_0 = b,$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{k} \left( (k-1)\alpha_n + \frac{a}{\alpha_n^{k-1}} \right).$$

Es gelten:

- (i)  $\alpha_n > 0$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- (v) Die Folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge.
- (vi) Wenn  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_n \xrightarrow{n} x$ , dann gilt  $x \geq 0$  und  $x^k = a$ .

DEFINITION 1.8.5. Die Menge  $\mathbb{I}$  der irrationalen Zahlen ist definiert durch

$$\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$$

d.h.  $\mathbb{I}$  ist das Komplement von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ .

Es gilt  $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{I}$ .

## 1.9. Unendliche Reihen

DEFINITION 1.9.1. Sei  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen. Die Folge der Partialsummen  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist definiert durch

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wenn  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert, dann schreiben wir

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n.$$

Wenn  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, dann schreiben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Wenn  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergent ist, dann schreiben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \notin \mathbb{R}.$$

BEISPIEL 1.9.2. Sei  $\alpha_n = 0$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Folge  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Partialsummen der Folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat die Glieder

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k = 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$$

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 0.$$

BEISPIEL 1.9.3. Sei  $x \neq 0$ , und sei  $\alpha_n = x$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Folge  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Partialsummen der Folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat die Glieder

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k = x + x + \dots + x = (n+1)x.$$

Nach dem Archimedischen-Axiom ist die Folge  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt, und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \notin \mathbb{R}.$$

Sei  $n \geq m$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma_n - \sigma_m &= \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k \right) - \left( \sum_{k=0}^m \alpha_k \right) \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m + \alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m) \\ &= \alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n \\ &= \sum_{k=m+1}^n \alpha_k. \end{aligned}$$

Darüber hinaus gilt

$$\begin{aligned} \sigma_n - \sigma_{n-1} &= \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k \right) - \left( \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \right) \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}) \\ &= \alpha_n. \end{aligned}$$

Übrigens lässt sich jede Folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch als Reihe darstellen, denn es gilt

$$\alpha_n = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0) + (\alpha_2 - \alpha_1) + \dots + (\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \\
&= \alpha_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k).
\end{aligned}$$

Eine solche Darstellung, in der sich zwei aufeinander folgende Terme immer zur Hälfte wegekürzen, nennt man auch *Telescop-Summe*.

SATZ 1.9.4. Seien  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen reeller Zahlen, sodass gilt

$$\gamma_k = \alpha_k - \alpha_{k-1},$$

für alle  $k \geq 1$ , und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x$ , wobei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = x - \alpha_0.$$

BEWEIS. Es gilt

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k = \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \alpha_{k-1}) = \alpha_n - \alpha_0.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n - \alpha_0) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_0 \\
&= x - \alpha_0.
\end{aligned}$$

□

BEISPIEL 1.9.5. Sei die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Es gilt

$$\gamma_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k} = \alpha_k - \alpha_{k-1},$$

wobei

$$\alpha_n = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt  $\alpha_0 = 0$  und  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$ . Deshalb gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - 0 = 1.$$

**SATZ 1.9.6.** *Seien  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen reeller Zahlen, und seien  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Wenn*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \& \quad \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \in \mathbb{R},$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n) &\in \mathbb{R}, \quad \text{und} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n) &= \lambda \left( \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \right) + \mu \left( \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \right). \end{aligned}$$

**BEWEIS.** Seien die Folgen

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=0}^n \alpha_k; \quad n \in \mathbb{N}, \\ \tau_n &= \sum_{k=0}^n \beta_k; \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Es gelten

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = x, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = y, \end{aligned}$$

wobei  $x, y \in \mathbb{R}$ . Sei die Folge

$$\chi_n = \lambda \sigma_n + \mu \tau_n; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aus dem Satz 1.7.6 folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\lambda \sigma_n + \mu \tau_n] \\ &= \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \\ &= \lambda x + \mu y \end{aligned}$$

$$= \lambda \left( \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \right) + \mu \left( \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \right). \quad \square$$

BEISPIEL 1.9.7. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} = 5 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right) = 5 \cdot 1 = 5.$$

SATZ 1.9.8 (Unendliche geometrische Reihe). Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$ . Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \in \mathbb{R} \quad \& \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

BEWEIS. Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Es gilt

$$(1-x) \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) = 1 - x^{n+1}.$$

Wegen  $x \neq 1$  gilt

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Es gilt  $|x| < 1$ , also (Aufgabe 4(ii)(a), Blatt 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$ , und

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right] \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - x^{n+1}]}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x)} \\ &= \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1}}{1 - x} \\ &= \frac{1}{1 - x}. \end{aligned} \quad \square$$

BEISPIEL 1.9.9. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Nach dem Satz 1.9.8 gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

und

$$2 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

### 1.10. Konvergenzkriterien für Reihen

**SATZ 1.10.1 (Cauchysches-Konvergenz-Kriterium).** *Sei  $(\alpha_n)_n$  eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$  konvergiert genau dann, wenn gilt*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq m \geq C_\varepsilon \left( \left| \sum_{k=m+1}^n \alpha_k \right| < \varepsilon \right).$$

**BEWEIS.** Nach dem Satz 1.8.2 und nach dem Vollständigkeits-Axiom konvergiert die Folge  $(\sigma_n)_n$  genau dann, wenn gilt “für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $C_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , sodass gilt

$$|\sigma_n - \sigma_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n \alpha_k \right| < \varepsilon,$$

für alle  $n \geq m \geq C_\varepsilon$ ”.

**SATZ 1.10.2 (Divergenz-Kriterium).** *Sei  $(\alpha_n)_n$  eine Folge reeller Zahlen. Wenn die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$  konvergiert, dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ .*

**BEWEIS.** Nach dem Cauchysches-Konvergenz-Kriterium gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq C_\varepsilon + 1 \left( \left| \sum_{k=n-1}^n \alpha_k \right| = |\alpha_n| < \varepsilon \right).$$

□

**BEISPIEL 1.10.3.** Wenn  $x \neq 0$ , dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x \notin \mathbb{R},$$

weil die konstante Folge  $x$  nicht gegen 0 konvergiert.

Die Umkehrung des Satzes 1.10.2 gilt nicht: Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \quad \text{aber} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

DEFINITION 1.10.4. Sei  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$  heißt *absolut konvergent*, falls

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \in \mathbb{R}.$$

SATZ 1.10.5. Sei  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS. Aufgabe. □

SATZ 1.10.6 (Majoranten-Kriterium). Seien  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen reeller Zahlen mit

$$\forall n \in \mathbb{N} (|\alpha_n| \leq \beta_n), \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS. Nach dem Cauchysches-Konvergenz-Kriterium gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon^\beta \in \mathbb{N} \forall n \geq m \geq C_\varepsilon^\beta \left( \left| \sum_{k=m+1}^n \beta_k \right| < \varepsilon \right).$$

Sei  $C_\varepsilon^{|\alpha|} = C_\varepsilon^\beta$ . Für alle  $n \geq m \geq C_\varepsilon^{|\alpha|}$  gilt

$$\sum_{k=m+1}^n |\alpha_k| \leq \sum_{k=m+1}^n \beta_k \leq \left| \sum_{k=m+1}^n \beta_k \right| < \varepsilon.$$

Nach dem Cauchysches-Konvergenz-Kriterium es gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \in \mathbb{R}$ . □

Zum Beispiel gilt (Aufgabe)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \in \mathbb{R}, \quad k \geq 2.$$

SATZ 1.10.7 (Quotienten-Kriterium). Sei  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen mit  $\alpha_n \neq 0$ , für alle  $n \geq n_0$ . Sei  $\theta \in \mathbb{R}$  mit

(i)  $0 < \theta < 1$ , und

(ii) für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| \leq \theta.$$

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS. Weil

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| = \sum_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_k| + \sum_{k=n_0}^{\infty} |\alpha_k|,$$

reicht es, folgendes zu zeigen:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |\alpha_k| \in \mathbb{R}.$$

Ohne Verlust der Allgemeinheit, nehmen wir an  $\alpha_n \neq 0$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Mithilfe des Induktionsprinzips IND folgt aus (ii) folgendes

$$\forall n \in \mathbb{N} (|\alpha_n| \leq |\alpha_0| \theta^n).$$

Sei die Folge

$$\beta_n = |\alpha_0| \theta^n; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_0| \theta^n = |\alpha_0| \left( \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \right) = |\alpha_0| \frac{1}{1-\theta} \in \mathbb{R}.$$

Durch Verwenden des Majoranten-Kriteriums ergibt sich  $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \in \mathbb{R}$ .  $\square$

## KAPITEL 2

# Reelle Funktionen

### 2.1. Der Graph einer reellen Funktion

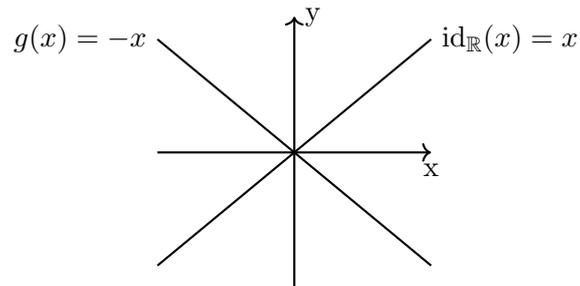
DEFINITION 2.1.1. Eine *reelle Funktion* ist eine Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $D$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist. Der *Graph*  $\text{Gr}(f)$  von  $f$  ist die Menge

$$\text{Gr}(f) = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}.$$

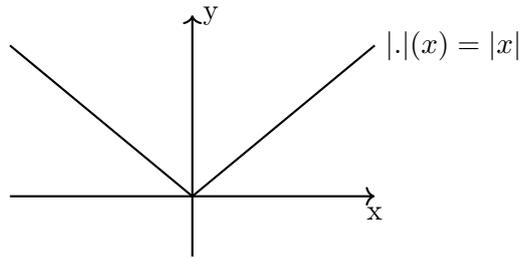
Jede parallele Gerade zur  $y$ -Achse schneidet den Graphen einer Funktion höchstens einmal.

BEISPIEL 2.1.2. Sei  $c \in \mathbb{R}$ . Die *konstante Funktion*  $c$  ist die Funktion  $f_c : D \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f_c(x) = c$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Wenn  $D = \mathbb{R}$ , ist der Graph von  $f_c$  eine horizontale Linie parallel zur  $x$ -Achse.

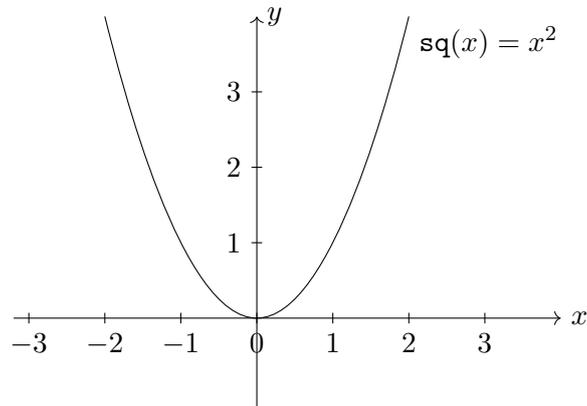
BEISPIEL 2.1.3. Die *identische Abbildung*  $\text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch  $x \mapsto x$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Sei die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $g(x) = -x$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$  d.h.  $g = -\text{id}_{\mathbb{R}}$ . Der Graph von  $\text{id}_{\mathbb{R}}$  und der Graph von  $g$  sind wie folgt:



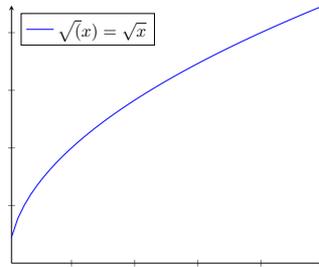
BEISPIEL 2.1.4. Die *Betragsfunktion*  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch  $x \mapsto |x|$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Der Graph von  $|\cdot|$  ist wie folgt:



BEISPIEL 2.1.5. Die *quadratische Funktion*  $\mathbf{sq} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch  $\mathbf{sq}(x) = x^2$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Der Graph von  $\mathbf{sq}$  ist die folgende Kurve:



BEISPIEL 2.1.6. Die *Quadratwurzelfunktion*  $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch  $\sqrt{\cdot}(x) = \sqrt{x}$ , für alle  $x \in \mathbb{R}^+$ . Der Graph von  $\sqrt{\cdot}$  ist die folgende Kurve:



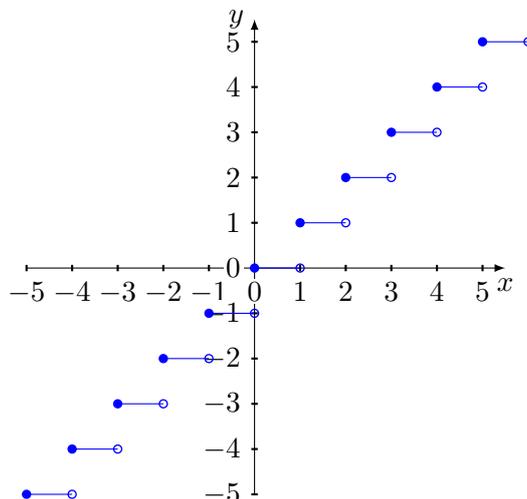
BEISPIEL 2.1.7. Die *Dirichlet-Funktion*  $\mathbf{Dir} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$\mathbf{Dir}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

BEISPIEL 2.1.8. Die *floor-Funktion*  $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ , wobei  $\lfloor x \rfloor$  ist die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Der Graph von  $\lfloor \cdot \rfloor$  ist wie folgt:



DEFINITION 2.1.9. Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ , und seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Seien die Funktionen  $f + g, \lambda f, f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

für alle  $x \in D$ . Sei

$$D_g^* = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}.$$

Die Funktion  $\frac{f}{g} : D_g^* \rightarrow \mathbb{R}$ , ist definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

für alle  $x \in D_g^*$ .

Der Graph von  $-f$  ergibt sich als Spiegelung des Graphen von  $f$  an der  $x$ -Achse.

BEISPIEL 2.1.10. Die Funktion  $\frac{1}{\text{sq}} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ , ist definiert durch

$$\left(\frac{1}{\text{sq}}\right)(x) = \frac{1}{x^2},$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^*$ .

BEISPIEL 2.1.11. Eine *Polynomfunktion*  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch,

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=0}^n a_k \text{id}_{\mathbb{R}}^k \\ &= a_0 \text{id}_{\mathbb{R}}^0 + a_1 \text{id}_{\mathbb{R}}^1 + \dots + a_n \text{id}_{\mathbb{R}}^n \\ &= a_0 + a_1 \text{id}_{\mathbb{R}} + a_2 \text{id}_{\mathbb{R}}^2 + \dots + a_n \text{id}_{\mathbb{R}}^n, \end{aligned}$$

wobei  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  die *Koeffizienten* von  $p$  sind. Wenn  $a_n \neq 0$ , dann ist  $n$  der *Grad* von  $p$ . Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(\sum_{k=0}^n a_k \text{id}_{\mathbb{R}}^k\right)(x) \\ &= (a_0 + a_1 \text{id}_{\mathbb{R}} + a_2 \text{id}_{\mathbb{R}}^2 + \dots + a_n \text{id}_{\mathbb{R}}^n)(x) \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n. \end{aligned}$$

Die identische Abbildung  $\text{id}_{\mathbb{R}}$  ist eine Polynomfunktion ersten Grades mit Koeffizienten  $a_0 = 0$  und  $a_1 = 1$ . Die quadratische Funktion  $\text{sq}(x) = x^2$  ist eine Polynomfunktion zweiten Grades mit Koeffizienten  $a_0 = a_1 = 0$  und  $a_2 = 1$ .

BEISPIEL 2.1.12. Seien die Polynomfunktionen

$$p = \sum_{k=0}^n a_k \text{id}_{\mathbb{R}}^k \quad \& \quad q = \sum_{k=0}^m b_k \text{id}_{\mathbb{R}}^k.$$

Die *rationale Funktion*  $R_{pq} : D_q^* \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} R_{pq}(x) &= \frac{p(x)}{q(x)} \\ &= \frac{\left(\sum_{k=0}^n a_k \text{id}_{\mathbb{R}}^k\right)(x)}{\left(\sum_{k=0}^m b_k \text{id}_{\mathbb{R}}^k\right)(x)} \end{aligned}$$



Jede parallele Gerade zur  $x$ -Achse schneidet den Graphen einer Injektion höchstens einmal und jede parallele zur  $x$ -Achse schneidet den Graphen einer Surjektion mindestens einmal.

## 2.2. Grenzwerte

DEFINITION 2.2.1. Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , und  $x_0, l \in \mathbb{R}$ . Sei

$$\mathbb{F}(\mathbb{N}) = \{\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

(i) Sei  $D(x_0)$  die Menge aller Folgen reeller Zahlen in  $D$  die gegen  $x_0$  konvergieren d.h.

$$D(x_0) = \{\alpha \in \mathbb{F}(\mathbb{N}) \mid \forall n \in \mathbb{N} (\alpha_n \in D) \ \& \ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x_0\}.$$

Sei  $D(x_0)$  eine nicht-leere Menge ist, dann heißt  $x_0$  ein *Berührungspunkt* von  $D$  und wir definieren

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l : \Leftrightarrow \forall \alpha \in D(x_0) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = l \right)$$

d.h.

$$\left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x_0 \right] \Rightarrow \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = l \right],$$

für alle Folgen  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen in  $D$ .

(ii) Sei die Menge

$$D^+(x_0) = \{\alpha \in \mathbb{F}(\mathbb{N}) \mid \forall n \in \mathbb{N} (\alpha_n \in D \ \& \ \alpha_n > x_0) \ \& \ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x_0\}.$$

Sei  $D^+(x_0)$  eine nicht-leere Menge. Wir definieren

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l : \Leftrightarrow \forall \alpha \in D^+(x_0) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = l \right).$$

(iii) Sei die Menge

$$D^-(x_0) = \{\alpha \in \mathbb{F}(\mathbb{N}) \mid \forall n \in \mathbb{N} (\alpha_n \in D \ \& \ \alpha_n < x_0) \ \& \ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x_0\}.$$

Sei  $D^-(x_0)$  eine nicht-leere Menge. Wir definieren

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l : \Leftrightarrow \forall \alpha \in D^-(x_0) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = l \right).$$

(iv) Sei  $D$  nach oben unbeschränkt d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x \in D (x \geq n).$$

Sei die Menge

$$D(+\infty) = \{\alpha \in \mathbb{F}(\mathbb{N}) \mid \forall_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n \in D) \ \& \ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty\},$$

wobei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty \Leftrightarrow \forall_{M > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N} (\alpha_n \geq M).$$

Sei  $D(+\infty)$  eine nicht-leere Menge. Wir definieren

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall_{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(+\infty)} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = l \right).$$

(v) Sei  $D$  nach unten unbeschränkt d.h.

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x \in D} (x \leq -n).$$

Sei die Menge

$$D(-\infty) = \{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \forall_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n \in D) \ \& \ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -\infty\},$$

wobei

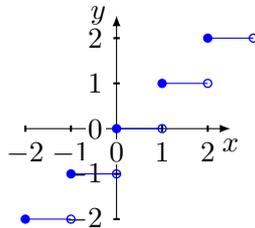
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -\infty \Leftrightarrow \forall_{M > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N} (\alpha_n \leq -M).$$

Sei  $D(-\infty)$  eine nicht-leere Menge. Wir definieren

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall_{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(-\infty)} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = l \right).$$

Wenn  $x_0 \in D$ , dann ist  $x_0$  ein Berührungspunkt von  $D$ , weil die konstante Folge  $x_0$  zur  $D(x_0)$  gehört.

BEISPIEL 2.2.2. Sei die floor-Funktion  $\lfloor \cdot \rfloor$ .



Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lfloor x \rfloor = 0 \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \lfloor x \rfloor = -1;$$

Wenn  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+(0)$ , dann gilt  $\alpha_n > 0$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Weil  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ , gibt es  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass gilt  $\alpha_n \in (0, 1]$ , für alle  $n \geq n_0$ . Also gilt  $\lfloor \alpha_n \rfloor = 0$ , für alle  $n \geq n_0$ , und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor \alpha_n \rfloor = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Wenn  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^-(0)$ , dann gilt  $\alpha_n < 0$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Weil  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ , gibt es  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass gilt  $\alpha_n \in (-1, 0]$ , für alle  $n \geq n_0$ . Also gilt  $\lfloor \alpha_n \rfloor = -1$ , für alle  $n \geq n_0$ , und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor \alpha_n \rfloor = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 = -1.$$

### 2.3. Stetigkeit

DEFINITION 2.3.1. Seien  $D$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$  (also gilt  $D(x_0) \neq \emptyset$ ). Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stetig im Punkt  $x_0$* , falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Die Funktion  $f$  heißt *stetig in  $D$* , falls  $f$  in jedem Punkt von  $D$  stetig ist.

Nach Definition 2.2.1 ist eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig im Punkt  $x_0 \in D$  genau dann, wenn

$$\left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x_0 \right] \Rightarrow \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = f(x_0) \right],$$

für alle Folgen  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen in  $D$ .

BEISPIEL 2.3.2. Die konstante Funktion  $f_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f_c(x) = c$ , für jedes  $x \in \mathbb{R}$ , wobei  $c \in \mathbb{R}$ , ist eine überall stetige Funktion. Seien  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen und  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x_0$ . Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_c(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c = f_c(x_0).$$

BEISPIEL 2.3.3. Die identische Abbildung  $\text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $\text{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$ , für jedes  $x \in \mathbb{R}$ , ist eine überall stetige Funktion. Sei  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen und  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x_0$ . Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{id}_{\mathbb{R}}(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x_0 = \text{id}_{\mathbb{R}}(x_0).$$

BEISPIEL 2.3.4. Sei  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ . Die Funktion  $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definiert durch  $\sqrt{\cdot}(x) = \sqrt{x}$ , für jedes  $x \in \mathbb{R}^+$  ist stetig in  $\mathbb{R}^+$ . Zuerst zeigen wir, dass die Funktion  $\sqrt{\cdot}$  stetig im  $x_0 = 0$  ist. Sei  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen in  $\mathbb{R}^+$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon (|\alpha_n - 0| = |\alpha_n| = \alpha_n < \varepsilon).$$

Wir zeigen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\alpha_n} = \sqrt{0} = 0$ , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon (|\sqrt{\alpha_n} - 0| = |\sqrt{\alpha_n}| = \sqrt{\alpha_n} < \varepsilon).$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Also gilt  $\varepsilon^2 > 0$ . Sei  $n \geq N_{\varepsilon^2}^\alpha = N_\varepsilon^{\sqrt{\alpha}}$ . Es gilt

$$\alpha_n < \varepsilon^2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha_n} < \varepsilon.$$

Seien  $x_0 > 0$  und  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen in  $\mathbb{R}^+$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x_0$ , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon^\alpha \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon^\alpha (|\alpha_n - x_0| < \varepsilon).$$

Wir zeigen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\alpha_n} = \sqrt{x_0}$ , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon^{\sqrt{\alpha}} \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon^{\sqrt{\alpha}} (|\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon).$$

Sei  $n \geq N_{\varepsilon\sqrt{x_0}}^\alpha = N_\varepsilon^{\sqrt{\alpha}}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} |\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{x_0}| &= |\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{x_0}| \left( \frac{|\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{x_0}|}{|\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{x_0}|} \right) \\ &= \left( |\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{x_0}| |\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{x_0}| \right) \frac{1}{|\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{x_0}|} \\ &= \left( |(\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{x_0})(\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{x_0})| \right) \frac{1}{|\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{x_0}|} \\ &= \left( |(\sqrt{\alpha_n})^2 - (\sqrt{x_0})^2| \right) \frac{1}{|\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{x_0}|} \\ &= \left( |\alpha_n - x_0| \right) \frac{1}{|\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{x_0}|} \\ &< \varepsilon \cdot \left( \sqrt{x_0} \frac{1}{|\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{x_0}|} \right) \\ &< \varepsilon \cdot 1 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Die in Beispiel 2.1.7 definierte Dirichletsche Funktion ist in keinem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  stetig (Aufgabe).

SATZ 2.3.5. Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$ ,  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(I) Angenommen die Funktionen  $f, g$  sind stetig im Punkt  $x_0$ .

(i) Dann sind auch die Funktionen  $f + g, \lambda f, f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$  (Definition 2.1.9) im Punkt  $x_0$  stetig.

(ii) Ist  $g(x_0) \neq 0 \Leftrightarrow x_0 \in D_g^*$ , so ist auch die Funktion  $\frac{f}{g} : D_g^* \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  stetig. Dabei ist  $D_g^* = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ .

(II)(i) Angenommen die Funktionen  $f, g$  sind stetig in  $D$ . Dann sind auch die Funktionen  $f + g, \lambda f, f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $D$  stetig.

(ii) Angenommen die Funktionen  $f, g$  sind stetig in  $D_g^*$ . Dann ist die Funktion  $\frac{f}{g} : D_g^* \rightarrow \mathbb{R}$  in  $D_g^*$  stetig.

BEWEIS. (I)(i) Sei  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen in  $D$ , sodass gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x_0$ . Nach dem Satz 1.7.6 gelten

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(\alpha_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [f(\alpha_n) + g(\alpha_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha_n) \\ &= f(x_0) + g(x_0) \\ &= (f + g)(x_0), \end{aligned}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda f)(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda f(\alpha_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lambda f(x_0) = (\lambda f)(x_0),$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f \cdot g)(\alpha_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [f(\alpha_n) \cdot g(\alpha_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha_n) \\ &= f(x_0) \cdot g(x_0) \\ &= (f \cdot g)(x_0). \end{aligned}$$

(I)(ii) Sei  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen in  $D_g^*$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = x_0$ . Nach Satz 1.7.6 gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{f}{g} \right)(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\beta_n)}{g(\beta_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(\beta_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left( \frac{f}{g} \right)(x_0).$$

(II)(i) folgt aus (I)(i) und (II)(ii) folgt aus (I)(ii).

**COROLLAR 2.3.6.** *Alle Polynomfunktionen und alle rationalen Funktionen sind stetig in ihrem Definitionsbereich.*

BEWEIS. Aus Satz 2.3.5(II)(i) folgt, dass eine Polynomfunktion

$$p = \sum_{k=0}^n a_k \text{id}_{\mathbb{R}}^k$$

stetig ist. Aus Satz 2.3.5(II)(ii) folgt, dass eine rationale Funktion  $R_{pq} : D_q^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$R_{pq}(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$= \frac{\left( \sum_{k=0}^n a_k \text{id}_{\mathbb{R}}^k \right)(x)}{\left( \sum_{k=0}^m b_k \text{id}_{\mathbb{R}}^k \right)(x)},$$

wobei

$$D_q^* = \{x \in \mathbb{R} \mid b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m \neq 0\}$$

auch stetig ist.  $\square$

**SATZ 2.3.7 (Komposition stetiger Funktionen).** *Seien  $D, E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$  und  $y_0 \in E$ , und seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit*

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq E.$$

(i) *Die Funktion  $f$  sei in  $x_0$  und  $g$  in  $y_0 = f(x_0)$  stetig. Dann ist die Funktion  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ .*

(ii) *Die Funktion  $f$  sei in  $D$  und  $g$  in  $E$  stetig. Dann ist die Funktion  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $D$ .*

**BEWEIS.** (i) Sei  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen in  $D$ , sodass gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x_0$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  in  $x_0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = f(x_0) = y_0.$$

Nach Voraussetzung gilt  $\beta_n = f(\alpha_n) \in E$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = y_0.$$

Da  $g$  in  $y_0$  stetig ist, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\beta_n) = g(y_0).$$

Deshalb folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(\alpha_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(\alpha_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} g(\beta_n) \\ &= g(y_0) \\ &= g(f(x_0)) \\ &= (g \circ f)(x_0). \end{aligned}$$

(ii) folgt aus (i).  $\square$

**BEISPIEL 2.3.8.** Die Funktion  $\text{sq} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , wobei  $\text{sq}(x) = x^2$ , für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist stetig in  $\mathbb{R}$ . Nach dem Beispiel 2.3.4 die Funktion  $\sqrt{\cdot}$  ist stetig in  $\mathbb{R}^+$ . Dann ist auch die Funktion  $|\cdot| = \sqrt{\cdot} \circ \text{sq}$  stetig in  $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{sq}} & \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} & \mathbb{R}. \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \sqrt{\circ \text{sq}} = |\cdot| & & \end{array}$$

weil  $(\sqrt{\circ \text{sq}})(x) = \sqrt{(\text{sq}(x))} = \sqrt{x^2} = |x|$ .

## 2.4. Der Zwischenwertsatz

**THEOREM 2.4.1** (Zwischenwertsatz). *Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ , und sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion in  $[a, b]$  mit  $f(a)f(b) < 0$ . Dann existiert ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = 0$ .*

**BEWEIS.** Die Bedingung  $f(a)f(b) < 0$  ist äquivalent zur Disjunktion

$$[f(a) < 0 \ \& \ f(b) > 0] \quad \text{oder} \quad [f(a) > 0 \ \& \ f(b) < 0].$$

Die Aussage des Satzes ist anschaulich klar. Sie bedarf aber natürlich dennoch eines Beweises, da eine Zeichnung kein Beweis ist.

Sei  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$ . Wir definieren induktiv eine Folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und eine Folge  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sodass gilt:

- (1)  $[\alpha_0, \beta_0] \supseteq [\alpha_1, \beta_1] \supseteq [\alpha_2, \beta_2] \dots \supseteq [\alpha_n, \beta_n] \supseteq [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \supseteq \dots$
- (2)  $\beta_n - \alpha_n = \frac{b-a}{2^n}$ .
- (3)  $f(\alpha_n) \leq 0$ , für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .
- (4)  $f(\beta_n) \geq 0$ , für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir setzen  $\alpha_0 = a$  und  $\beta_0 = b$ . Sei das Intervall  $[\alpha_n, \beta_n]$  bereits definiert. Wir setzen

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} & , \text{ wenn } f\left(\frac{\alpha_n + \beta_n}{2}\right) \leq 0 \\ \alpha_n & , \text{ andernfalls} \end{cases}$$

$$\beta_{n+1} = \begin{cases} \beta_n & , \text{ wenn } f\left(\frac{\alpha_n + \beta_n}{2}\right) \leq 0 \\ \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} & , \text{ andernfalls} \end{cases}$$

Offenbar sind die Eigenschaften (1) – (4) für  $n + 1$  erfüllt. Wir zeigen, dass die Folge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy Folge ist. Es gilt

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \begin{cases} \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} - \alpha_n = \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}, & f\left(\frac{\alpha_n + \beta_n}{2}\right) \leq 0 \\ 0 & , \text{anderfalls.} \end{cases}$$

Also gilt

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}},$$

Für  $n \geq m$  gilt

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \alpha_m| &= |(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}) + \dots + (\alpha_{m+1} - \alpha_m)| \\ &\leq |\alpha_n - \alpha_{n-1}| + |\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}| + \dots + |\alpha_{m+1} - \alpha_m| \\ &\leq \frac{b-a}{2^n} + \frac{b-a}{2^{n-1}} + \dots + \frac{b-a}{2^m} \\ &= (b-a) \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^m} \right) \\ &= (b-a) \sum_{k=m}^n \frac{1}{2^k} \\ &= (b-a) \left| \sum_{k=m}^n \frac{1}{2^k} \right| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

für jedes

$$n \geq m \geq C_{\frac{\varepsilon}{b-a}}^\gamma,$$

wobei nach dem Cauchuschen-Konvergenz-Kriterium für die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

gibt es  $C_{\frac{\varepsilon}{b-a}}^\gamma \in \mathbb{N}$ , sodass gilt

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{1}{2^k} \right| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

für jedes  $n \geq m \geq C_{\frac{\varepsilon}{b-a}}^\gamma$ . Die Folge  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist auch eine Cauchy Folge, weil

$$\begin{aligned} |\beta_n - \beta_m| &= |\beta_n - \alpha_n + \alpha_n - \alpha_m + \alpha_m - \beta_m| \\ &\leq |\beta_n - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_m| + |\alpha_m - \beta_m| \end{aligned}$$

$$= \frac{b-a}{2^n} + |\alpha_n - \alpha_m| + \frac{b-a}{2^m}.$$

Nach dem Vollständigkeitsaxiom gibt es  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_n \xrightarrow{n} x$  und  $\beta_n \xrightarrow{n} y$ .  
Weil

$$\begin{aligned} y - x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n}, \\ &= 0 \end{aligned}$$

gilt  $x = y$ . Weil  $[a, b]$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist, gilt  $x \in [a, b]$  (wenn  $x > b$  oder  $x < a$ , dann kann weder  $\alpha_n \xrightarrow{n} x$  noch  $\beta_n \xrightarrow{n} x$ ).  
Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = f(x).$$

Aus Satz 1.7.8 folgt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) \leq 0,$$

und

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) \geq 0.$$

Also gilt  $f(x) = 0$ . □

**COROLLAR 2.4.2.** *Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion in  $[a, b]$ . Sei  $c \in \mathbb{R}$  mit  $f(a) < c < f(b)$ . Dann existiert  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = c$ .*

**BEWEIS.** Sei die Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$g(x) = f(x) - c,$$

für alle  $x \in [a, b]$ . Dann ist  $g$  stetig in  $[a, b]$  mit  $g(a) = f(a) - c < 0$  und  $g(b) = f(b) - c > 0$ . Nach Satz 2.4.1 existiert daher ein  $x_0 \in [a, b]$  mit

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - c = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = c. \quad \square$$

**COROLLAR 2.4.3.** *Sei  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Polynomfunktion ungeraden Grades d.h. es gibt  $n \in \mathbb{N}$  mit*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n} + x^{2n+1},$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann existiert ein  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit  $p(x_0) = 0$ .

BEWEIS. Sei  $x \neq 0$ . Es gilt

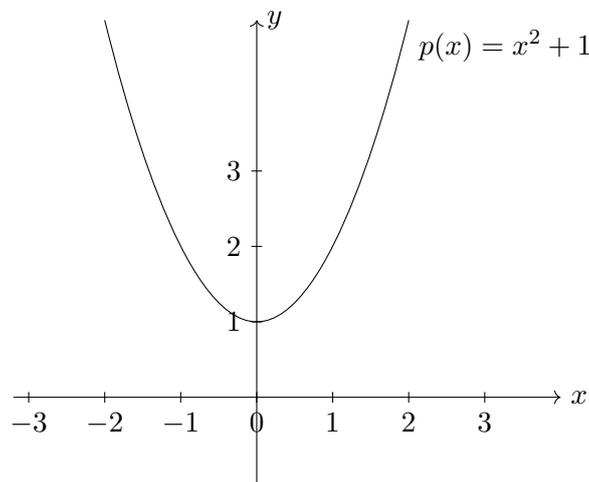
$$p(x) = x^{2n+1} \left( \frac{a_0}{x^{2n+1}} + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_2}{x^{2n-1}} + \dots + \frac{a_{2n}}{x} + 1 \right).$$

Also gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty.$$

Man kann also Stellen  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < 0 < b$  finden mit  $p(a) < 0 < p(b)$ . Deshalb gibt es ein  $x_0 \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  mit  $p(x_0) = 0$ .  $\square$

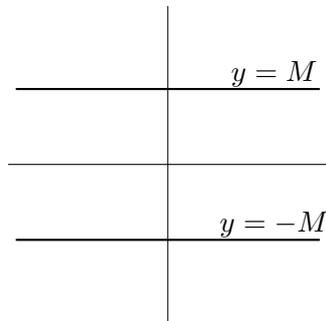
**Bemerkung.** Eine Polynomfunktion geraden Grades braucht keine reelle Nullstelle zu besitzen, wie das Beispiel  $p(x) = x^2 + 1$  zeigt.



DEFINITION 2.4.4. Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *beschränkt*, wenn ein  $M > 0$  existiert, sodass gilt

$$\forall x \in D (|f(x)| \leq M).$$

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion mit  $|f(x)| \leq M$ , für alle  $x \in D$ . Dann ist der Graph von  $f$  zwischen den horizontalen Linien  $y = M$  und  $y = -M$ .



Die stetige Funktion  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $p(x) = x^2 + 1$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ , ist unbeschränkt.

**THEOREM 2.4.5.** *Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ , und sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion in  $[a, b]$ . Dann existieren  $x_0, x_1 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = m$ ,  $f(x_1) = M$  und*

$$\forall_{x \in [a, b]} (m \leq f(x) \leq M).$$

**BEWEIS.** Siehe [1], p. 110. □

## 2.5. Elementare Funktionen

**SATZ 2.5.1.** *Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist die Exponentialreihe*

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ &= \frac{1}{1} + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \end{aligned}$$

*absolut konvergent.*

**BEWEIS.** Wenn  $x = 0$ , dann gilt

$$\exp(0) = 1 + 0 + \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{6} + \frac{0^4}{24} + \dots = 1.$$

Wenn  $x \neq 0$ , dann folgt die Behauptung aus dem Quotienten-Kriterium (Satz 1.10.7). Mit

$$\alpha_n = \frac{x^n}{n!}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n x}{n!(n+1)}$$

gilt für alle  $x \neq 0$  und  $n \geq 2|x|$

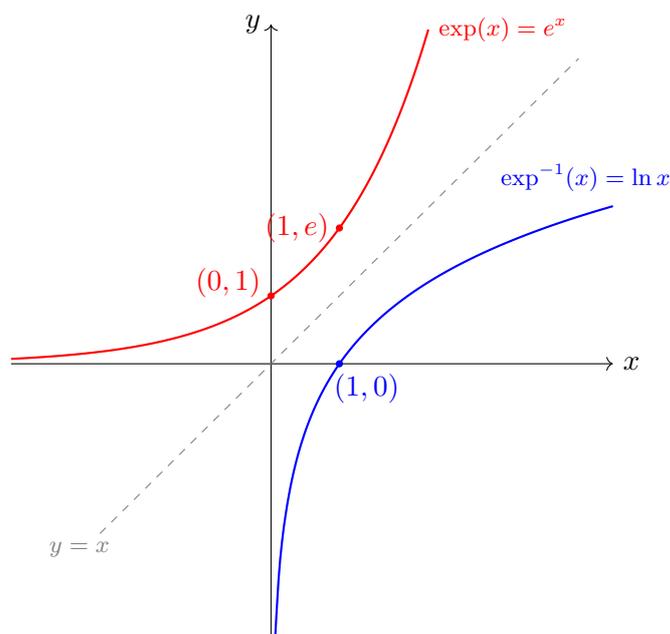
$$\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \left| \frac{x^n x n!}{x^n n! (n+1)} \right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2}. \quad \square$$

DEFINITION 2.5.2. Mit der Exponentialreihe definiert man die berühmte *Eulersche Zahl*

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots$$

und die *Exponentialfunktion*  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\exp(x) = e^x$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Der Graph von  $\exp(x)$  ist die folgende rote Kurve:



SATZ 2.5.3. Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

- (i)  $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ .
- (ii)  $\exp(x) > 0$ .

$$(iii) \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

$$(iv) \exp(n) = e^n, \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

$$(v) \exp(k) = e^k, \text{ für jedes } k \in \mathbb{Z}.$$

BEWEIS. Aufgabe. □

Die Formel (v) des Satzes 2.5.3 motiviert die Bezeichnung Exponentialfunktion. Man kann sagen, dass  $\exp(x)$  die Potenzen  $e^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , interpoliert und so auf nicht-ganze Exponenten ausdehnt. Man schreibt deshalb auch suggestiv  $e^x$  für  $\exp(x)$ . Die Exponentialfunktion  $\exp$  ist stetig und streng monoton wachsend, d.h.

$$x < x' \Rightarrow \exp(x) < \exp(x'),$$

und bildet  $\mathbb{R}$  bijektiv auf  $\mathbb{R}^{+*} = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$  ab. Aus  $x < x' \Rightarrow \exp(x) < \exp(x')$  folgt  $\exp(x) = \exp(x') \Rightarrow x = x'$ , für jedes  $x, x' \in \mathbb{R}$ .

DEFINITION 2.5.4. Die Umkehrfunktion

$$\ln : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \ln(x)$$

heißt *natürlicher Logarithmus*.

Die Funktion  $\ln$  ist stetig. Es gelten

$$e^x = y \Leftrightarrow \ln(y) = x,$$

$$\exp(\ln(y)) = e^{\ln(y)} = y,$$

$$\ln(\exp(x)) = \ln e^x = x,$$

$$y < y' \Rightarrow \ln(y) < \ln(y').$$

Aus  $y < y' \Rightarrow \ln(y) < \ln(y')$  folgt  $\ln(y) = \ln(y') \Rightarrow y = y'$ , für jedes  $y, y' \in \mathbb{R}^+$ . Es gilt auch die Funktionalgleichung

$$\ln(y \cdot y') = \ln(y) + \ln(y'),$$

für alle  $y, y' \in \mathbb{R}^{+*}$ . Statt  $\ln(x)$  ist auch die Bezeichnung  $\log(x)$  gebräuchlich.

Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  sind die unendliche Reihen

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots,$$

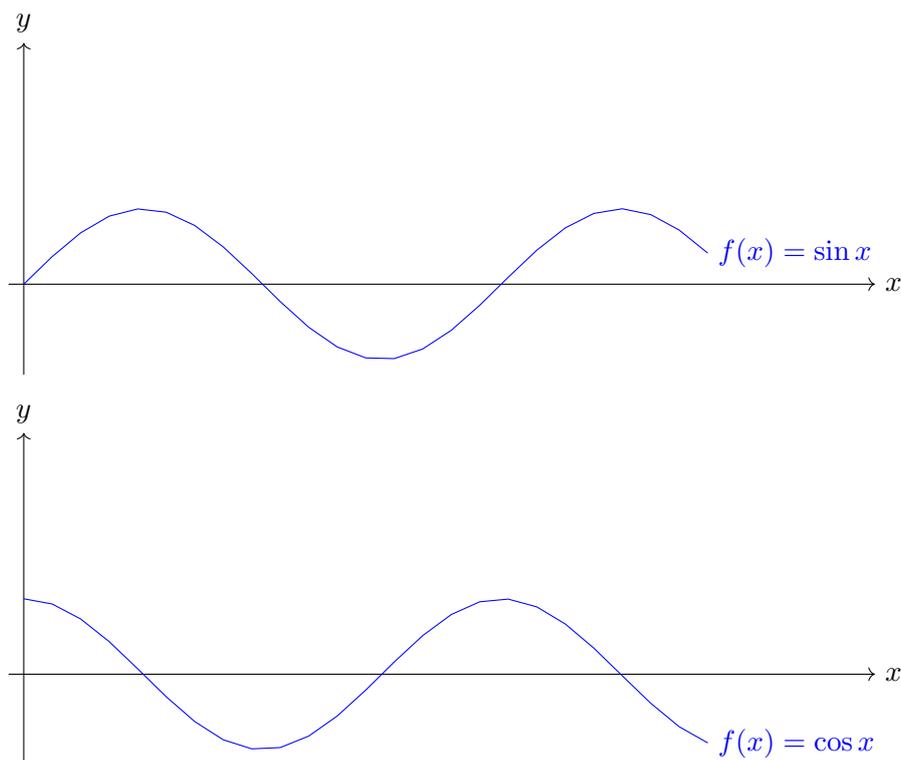
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots$$

absolut konvergent. Die absolute Konvergenz folgt unmittelbar aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| &= \sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n| \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

DEFINITION 2.5.5. Seien die trigonometrische Funktionen  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $x \mapsto \sin(x)$ , und  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $x \mapsto \cos(x)$ , für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

Die Funktionen  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  sind auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig.



Die Zahl  $\frac{\pi}{2}$  ist die eindeutig bestimmte Nullstelle der Funktion  $\cos$  im Intervall  $[0, 2]$  (siehe [1], pp. 142-143). Es gilt

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$

DEFINITION 2.5.6. Die *Tangensfunktion* ist für

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

definiert durch

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Die *Cotangensfunktion* ist für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  definiert durch

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Es gilt  $\cot(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

## 2.6. Differentiation

DEFINITION 2.6.1. Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  $f$  heißt *in einem Punkt  $x_0 \in D$  differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dabei sind bei der Limesbildung nur solche Folgen  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ ,
- (ii)  $h_n \neq 0$ , für jedes  $n \in \mathbb{N}$ ,
- (iii)  $x_0 + h_n \in D$ , für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

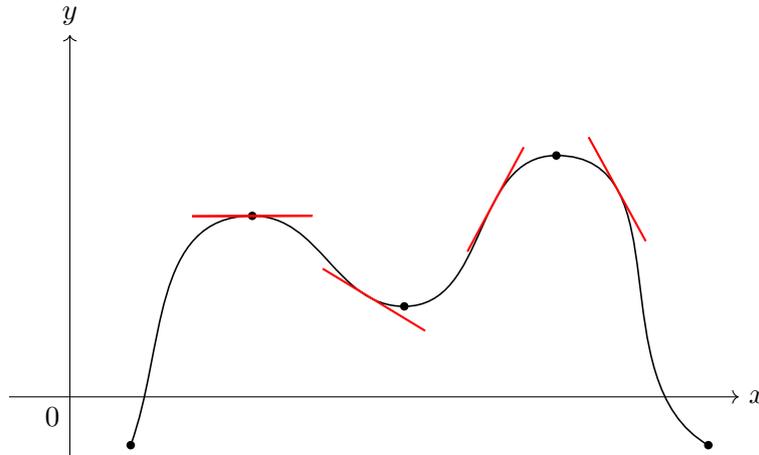
Der Grenzwert  $f'(x_0)$  heißt *Ableitung* von  $f$  im Punkt  $x_0$ . Die Funktion  $f$  heißt *differenzierbar in  $D$* , falls  $f$  in jedem Punkt  $x \in D$  differenzierbar ist. Man schreibt auch

$$\frac{df(x_0)}{dx}, \text{ oder } \frac{df}{dx}(x_0) \text{ für } f'(x_0).$$

Der Differenzquotient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ist die Steigung der Sekante des Graphen von  $f$  durch die Punkte  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ .



Beim Grenzübergang  $h \rightarrow 0 \Rightarrow x_0 + h \rightarrow x_0$ , geht die Sekante in die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  über.

BEISPIEL 2.6.2. Für eine konstante Funktion  $f_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ , wobei  $c \in \mathbb{R}$ , gilt

$$f_c'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_c(x_0 + h) - f_c(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

BEISPIEL 2.6.3. Für die identische Abbildung  $\text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ , gilt

$$\text{id}_{\mathbb{R}}'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{id}_{\mathbb{R}}(x_0 + h) - \text{id}_{\mathbb{R}}(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

BEISPIEL 2.6.4. Für die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \lambda x$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ , wobei  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda(x_0 + h) - \lambda x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda x_0 + \lambda h - \lambda x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \lambda = \lambda.$$

BEISPIEL 2.6.5. Für die Funktion  $\text{sq} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{sq}(x) = x^2$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ , gilt

$$\begin{aligned} \text{sq}'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sq}(x_0 + h) - \text{sq}(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x_0 + h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + \lim_{h \rightarrow 0} h \\
&= 2x_0 + 0 \\
&= 2x_0.
\end{aligned}$$

BEISPIEL 2.6.6. Für die Funktion  $\text{inv} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\text{inv}(x) = \frac{1}{x},$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^*$ , gilt

$$\begin{aligned}
\text{inv}'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{inv}(x_0 + h) - \text{inv}(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x_0 - x_0 - h}{(x_0+h)x_0}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h \cdot x_0(x_0 + h)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + h)} \\
&= -\frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} x_0(x_0 + h)} \\
&= -\frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} (x_0^2 + x_0h)} \\
&= -\frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} x_0^2 + \lim_{h \rightarrow 0} x_0h} \\
&= -\frac{1}{x_0^2 + 0} \\
&= -\frac{1}{x_0^2}.
\end{aligned}$$

BEISPIEL 2.6.7. Für die Funktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\exp'(x_0) = \exp(x_0),$$

für alle  $x_0 \in \mathbb{R}$  (Aufgabe).

BEISPIEL 2.6.8. Für die Funktion  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\sin'(x_0) = \cos(x_0),$$

für alle  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

BEISPIEL 2.6.9. Für die Funktion  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\cos'(x_0) = -\sin(x_0),$$

für alle  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

BEISPIEL 2.6.10. Die Betragsfunktion  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $|\cdot|(x) = |x|$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ , ist nicht differenzierbar im Punkt  $x_0 = 0$ . Angenommen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x_0 + h| - |x_0|}{h} = l \in \mathbb{R}.$$

Seien die Folgen reeller Zahlen

$$\alpha_n = \frac{1}{n+1}, \quad \beta_n = -\frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|0 + \frac{1}{n+1}| - |0|}{\frac{1}{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|0 + \alpha_n| - |\alpha_n|}{\alpha_n} \\ &= l \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|0 + \beta_n| - |\beta_n|}{\beta_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|0 - \frac{1}{n+1}| - |0|}{-\frac{1}{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} \\ &= -1, \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist.

Ist die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $x_0 \in D$  differenzierbar, so ist sie in  $x_0$  auch stetig d.h.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

weil für  $h \neq 0$  gilt:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \left[ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right] h.$$

## 2.7. Differentiations-Regeln

**SATZ 2.7.1.** *Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in D$  differenzierbare Funktionen und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch die Funktionen*

$$f + g, \lambda f, f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$$

*in  $x_0$  differenzierbar und es gelten die Rechenregeln:*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0),$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

*Ist  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in D$ , so ist auch die Funktion*

$$\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$$

*in  $x_0$  differenzierbar mit*

$$\left( \frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

**BEWEIS.** Wir benutzen die folgende Gleichungen:

$$\frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h},$$

$$\frac{(\lambda f)(x_0 + h) - (\lambda f)(x_0)}{h} = \lambda \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(fg)(x_0 + h) - (fg)(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0 + h) + f(x_0)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[f(x_0 + h) - f(x_0)]g(x_0 + h) + f(x_0)[g(x_0 + h) - g(x_0)]}{h} \\
&= \left[ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right] g(x_0 + h) + f(x_0) \left[ \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right].
\end{aligned}$$

Sei  $f(x) = 1$ , für alle  $x \in D$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} &= \frac{1}{h} \frac{g(x_0) - g(x_0 + h)}{g(x_0)g(x_0 + h)} \\
&= -\frac{1}{g(x_0)g(x_0 + h)} \left[ \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right],
\end{aligned}$$

also gilt

$$\left( \frac{1}{g} \right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Der allgemeine Fall folgt hieraus mithilfe der Produktregel:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{f}{g} \right)'(x_0) &= \left( f \cdot \frac{1}{g} \right)'(x_0) \\
&= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left( \frac{1}{g} \right)'(x_0) \\
&= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2} \\
&= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}.
\end{aligned}$$

□

BEISPIEL 2.7.2. Sei  $n \in \mathbb{N}^+$ . Für die Funktion  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f_n(x) = x^n,$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ , gilt

$$f_n'(x_0) = nx_0^{n-1},$$

für alle  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Sei  $n = 1$ . Es gilt

$$f_1'(x_0) = \text{id}_{\mathbb{R}}'(x_0) = 1 = 1f_1(x_0)^{1-1}.$$

Induktionsschritt: Da

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n x = f_n(x) \text{id}_{\mathbb{R}}(x),$$

folgt aus der Produktregel

$$\begin{aligned}
 f_{n+1}'(x_0) &= (f_n \cdot \text{id}_{\mathbb{R}})'(x_0) \\
 &= f_n'(x_0)\text{id}_{\mathbb{R}}(x_0) + f_n(x_0)\text{id}_{\mathbb{R}}'(x_0) \\
 &= f_n'(x_0)x_0 + f_n(x_0)1 \\
 &\stackrel{(I.V.)}{=} nx_0^{n-1}x_0 + x_0^n \\
 &= nx_0^n + x_0^n \\
 &= (n+1)x_0^n.
 \end{aligned}$$

DEFINITION 2.7.3. Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion in  $D$ . Die erste Ableitung von  $f$  ist die Funktion  $f': D \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$D \ni x_0 \mapsto f'(x_0); \quad x_0 \in D.$$

Wenn  $f'$  differenzierbar im Punkt  $x_0 \in D$  ist, dann heißt der Grenzwert  $(f')'(x_0)$  die zweite Ableitung von  $f$  im Punkt  $x_0$ . Man schreibt auch

$$f''(x_0), \text{ oder } \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}, \text{ oder } \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0).$$

Auf ähnliche Art definieren wir die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}(x_0)$  von  $f$  im Punkt  $x_0$ , für jedes  $n \in \mathbb{N}^+$ . Für  $n = 0$  definieren wir  $f^{(0)} = f$ .

COROLLAR 2.7.4. Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -te differenzierbare Funktionen im Punkt  $x_0 \in D$ , und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch die Funktionen

$$f + g, \lambda f, f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}$$

im Punkt  $x_0$   $n$ -te differenzierbar und es gelten die Rechenregeln:

$$(f + g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0),$$

$$(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0),$$

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0).$$

BEWEIS. Aufgabe. □



SATZ 2.8.3 (Kettenregel). Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $f(D) \subseteq E$

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & f(D) \subseteq E \xrightarrow{g} \mathbb{R}. \\ & \searrow & \nearrow \\ & & g \circ f \end{array}$$

Die Funktion  $f$  sei im Punkt  $x_0 \in D$  differenzierbar und  $g$  sei in  $y_0 = f(x_0) \in E$  differenzierbar. Dann ist die Funktion  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $x_0$  differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

BEWEIS. Sei die Funktion  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$h(e) = \begin{cases} \frac{g(e) - g(y_0)}{e - y_0} & , e \neq y_0 \\ g'(y_0) & , e = y_0. \end{cases}$$

Da  $g$  differenzierbar im Punkt  $y_0$  ist, gilt

$$\lim_{e \rightarrow y_0} h(e) = g'(y_0) = h(y_0)$$

d.h.  $h$  ist stetig im Punkt  $y_0$ . Darüber hinaus

$$\forall e \in E (g(e) - g(y_0) = h(e)(e - y_0)).$$

Wenn  $e \neq y_0$ , nutzen wir die Definition von  $h(e)$ . Wenn  $e = y_0$ , dann  $\forall e \in E (0 = 0)$ . Also gilt

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(f(x)) [f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= h(f(x_0)) f'(x_0) \\ &= h(y_0) f'(x_0) \\ &= g'(f(x_0)) f'(x_0). \quad \square \end{aligned}$$

BEISPIEL 2.8.4. Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$g(x) = f(2019x + 2020),$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$g'(x_0) = 2019f'(2019x_0 + 2020).$$

BEISPIEL 2.8.5. Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$g(x) = \sin^2(x),$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . D.h.  $h = \text{sq} \circ \sin$ . Dann gilt

$$g'(x_0) = 2 \sin(x_0) \sin'(x_0) = 2 \sin(x_0) \cos(x_0).$$

BEISPIEL 2.8.6. Sei  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$h(x) = \cos^2(x),$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . D.h.  $h = \text{sq} \circ \cos$ . Dann gilt

$$h'(x_0) = 2 \cos(x_0) \cos'(x_0) = 2 \cos(x_0) [-\sin(x_0)] = -2 \sin(x_0) \cos(x_0).$$

BEISPIEL 2.8.7. Seien  $a \in \mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = x^a,$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt (Aufgabe)

$$f'(x_0) = ax_0^{a-1},$$

für alle  $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ .

COROLLAR 2.8.8. Seien  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , und  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(C) \subseteq D$  und  $g(D) \subseteq E$

$$\begin{array}{ccccccc} C & \xrightarrow{f} & f(C) \subseteq D & \xrightarrow{g} & g(D) \subseteq E & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}. \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & & & h \circ g \circ f \end{array}$$

Sei  $f$  im Punkt  $x_0 \in C$  differenzierbar, sei  $g$  im Punkt  $y_0 = f(x_0) \in D$  differenzierbar, und sei  $h$  im Punkt  $z_0 = g(y_0) \in E$  differenzierbar. Dann ist die Funktion  $h \circ g \circ f : C \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar im Punkt  $x_0$  mit

$$(h \circ g \circ f)'(x_0) = h'(g(f(x_0))) \cdot g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

BEWEIS. Aufgabe. □

### 2.9. Der Mittelwertsatz

DEFINITION 2.9.1. Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  hat ein *lokales Maximum* im Punkt  $\xi \in [a, b]$ , falls es ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit

$$\forall x \in [a, b] (|x - \xi| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f(\xi)),$$

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  hat ein *lokales Minimum* im Punkt  $\xi \in [a, b]$ , falls es ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit

$$\forall x \in [a, b] (|x - \xi| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(\xi)).$$

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  hat ein *lokales Extremum* im Punkt  $\xi \in [a, b]$  wenn  $f$  ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum im Punkt  $\xi$  hat.

Eine konstante Funktion hat eine (lokales) Maximum [und eine (lokales) Minimum] in jedem Punkt ihrer Definitionsbereich. Offensichtlich muss ein lokales Minimum (Maximum) nicht zwingend ein globales Minimum (Maximum) sein.

SATZ 2.9.2. Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\xi \in [a, b]$ , Wenn  $f$  ein lokales Extremum im Punkt  $\xi$  hat und wenn  $f$  differenzierbar im Punkt  $\xi$  ist, dann gilt  $f'(\xi) = 0$ .

BEWEIS. Angenommen  $f$  hat ein lokales Maximum im Punkt  $\xi$ . Seien  $\varepsilon > 0$  mit  $f(x) \leq f(\xi)$ , für alle  $x \in [a, b]$  mit  $|x - \xi| < \varepsilon$ . Es gilt

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = f'_+(\xi) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = f'_-(\xi). \end{aligned}$$

Für ein genügend kleines  $h$  gilt  $f(\xi + h) - f(\xi) \leq 0$ . Wenn  $h > 0$ , dann gilt

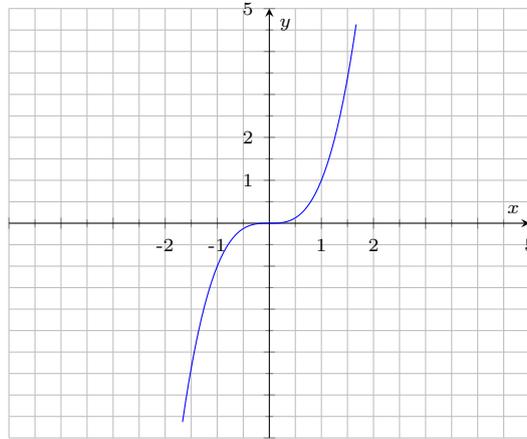
$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leq 0 \quad \& \quad f'_+(\xi) \leq 0.$$

Wenn  $h < 0$ , dann gilt

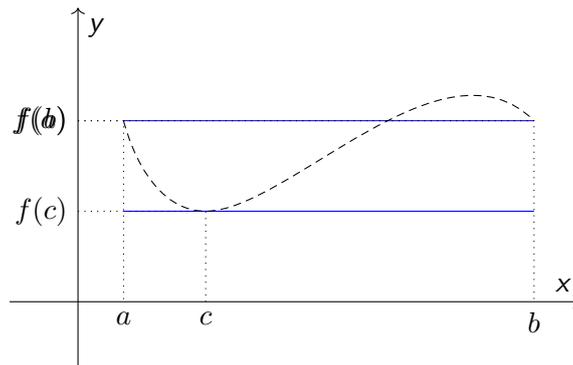
$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \geq 0 \quad \& \quad f'_-(\xi) \geq 0.$$

Also gilt  $0 \leq f'(\xi) \leq 0$  d.h.  $f'(\xi) = 0$ . □

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(x) = x^3$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ , hat kein lokales Extremum im Punkt  $\xi = 0$ , obwohl  $f'(0) = 0$  gilt.



**SATZ 2.9.3 (Satz von Rolle).** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(a) = f(b)$ . Wenn  $f$  differenzierbar in  $(a, b)$  ist, dann gibt es ein  $c \in (a, b)$  mit  $f'(c) = 0$ .

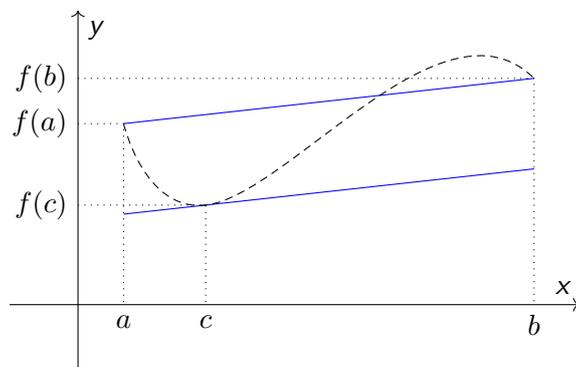


**BEWEIS.** Wenn  $f$  eine konstante Funktion ist, dann gilt  $f'(c) = 0$ , für alle  $c \in (a, b)$ . Wenn  $f$  keine konstante Funktion ist, dann gibt es  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f(x_0) > f(a)$  oder  $f(x_0) < f(a)$ . Sei  $f(x_0) > f(a)$ . Weil  $f$  eine stetige Funktion in  $[a, b]$  ist, hat  $f$  ein globales Maximum im Punkt  $\xi \in [a, b]$  (Theorem 2.4.5). Weil  $x_0 \in (a, b)$ , gilt  $\xi \in (a, b)$  auch. Aus Satz 2.9.2 folgt  $f'(\xi) = 0$ . Wenn  $f(x_0) < f(a)$ , arbeiten wir ähnlich.  $\square$

**COROLLAR 2.9.4 (Mittelwertsatz).** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Wenn  $f$  differenzierbar in  $(a, b)$  ist,

dann gibt es ein  $c \in (a, b)$  mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



BEWEIS. Sei die Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$F(x) = f(x) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a),$$

für alle  $x \in [a, b]$ . Offensichtlich, ist  $F$  eine stetige Funktion in  $[a, b]$  und differenzierbar in  $(a, b)$ . Es gilt

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

für alle  $x \in (a, b)$ . Darüber hinaus es gilt  $F(a) = f(a) = F(b)$ . Nach dem Satz von Rolle gibt es ein  $c \in (a, b)$  mit  $F'(c) = 0$ , und

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

*Geometrische Bedeutung des Mittelwertsatzes:* Es gibt ein Punkt  $(c, f(c))$  des Graphes von  $f$  sodass gilt: die Tangente der Kurve von  $f$  im Punkt  $(c, f(c))$  parallel zu dem Segment zwischen  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$  ist.

**COROLLAR 2.9.5.** *Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Funktionen, die in  $(a, b)$  differenzierbar sind. Dann gibt es ein  $\xi \in (a, b)$ , so dass*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

BEWEIS. Aufgabe. □

COROLLAR 2.9.6. Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktionen, die in  $(a, b)$  differenzierbar ist. Seien  $m, M \in \mathbb{R}$  mit

$$m \leq f'(x) \leq M,$$

für alle  $x \in (a, b)$ . Dann gilt

$$m(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq M(x_2 - x_1),$$

für alle  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit  $x_1 \leq x_2$ .

BEWEIS. Aufgabe. □

COROLLAR 2.9.7. Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktionen, die in  $(a, b)$  differenzierbar ist. Wenn  $f'(x) = 0$ , für alle  $x \in (a, b)$ , gilt, dann ist  $f$  eine konstante Funktion in  $[a, b]$ .

BEWEIS. Aufgabe. □

## 2.10. Treppenfunktionen

DEFINITION 2.10.1. Eine Funktion  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $a < b$ , heißt *Treppenfunktion*, falls es eine *Unterteilung*

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

des Intervalls  $[a, b]$  gibt, so dass  $\phi$  auf jedem offenen Teilintervall  $(x_{i-1}, x_i)$ , wobei  $i \in \{1, \dots, n\}$ , konstant ist. Sei  $\phi(x) := c_i$ , für alle  $x \in (x_{i-1}, x_i)$ . Die Werte von  $\phi$  in den Teilpunkten  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sind beliebig. Sei  $\mathcal{T}[a, b]$  die Menge aller Treppenfunktionen  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Das *Integral*  $\int_a^b \phi(x) dx$  einer Treppenfunktion  $\phi \in \mathcal{T}[a, b]$  ist definiert durch

$$\int_a^b \phi(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}).$$

Das Integral  $\int_a^b \phi(x) dx$  kann man als die zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen von  $\phi$  liegende Fläche deuten (falls  $\phi$  auf einigen Teilintervallen negativ ist, sind die entsprechenden Flächen negativ in Ansatz zu bringen).

SATZ 2.10.2. Das Integral  $\int_a^b \phi(x) dx$  von  $\phi \in \mathcal{T}[a, b]$  ist unabhängig von der Unterteilung von  $[a, b]$ .

BEWEIS. Seien die Unterteilungen von  $[a, b]$ :

$$(P) : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$(Q) : \quad a = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = b,$$

und seien

$$\phi(x) = c_i, \quad x \in (x_{i-1}, x_i), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

$$\phi(y) = d_j, \quad y \in (y_{j-1}, y_j), \quad j \in \{1, \dots, m\}.$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) = \int_P \phi(x) dx = \int_Q \phi(y) dy = \sum_{j=1}^m d_j(y_j - y_{j-1}).$$

Sei

$$P \leq Q :\Leftrightarrow \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} \exists_{k: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}} (x_i = y_{k_i}).$$

Also gilt

$$x_{i-1} = y_{k_{i-1}} < y_{k_{i-1}+1} < \dots < y_{k_i} = x_i,$$

und

$$d_j = c_i, \quad \text{für jedes } j \text{ mit } k_{i-1} < j < k_i.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_Q \phi(y) dy &= \sum_{j=1}^m d_j(y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} c_i(y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_P \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Seien  $P, Q$  beliebige Unterteilungen von  $[a, b]$ . Dann ist  $P \cup Q$  eine Unterteilung von  $[a, b]$  mit

$$P \leq P \cup Q \quad \& \quad Q \leq P \cup Q.$$

Es gelten

$$\int_{P \cup Q} \phi(z) dz = \int_P \phi(x) dx \quad \& \quad \int_{P \cup Q} \phi(z) dz = \int_Q \phi(x) dx,$$

also gilt  $\int_P \phi(x) dx = \int_Q \phi(y) dy$ . □

Sei die Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 = b$$

des Intervalls  $[a, b]$ . Eine Konstante Funktion  $\phi_c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $\phi_c(x) = c$ , für alle  $x \in [a, b]$ , ist eine Treppenfunktion mit

$$\int_a^b \phi_c(x) dx = \sum_{i=1}^1 c_i (x_i - x_{i-1}) = c(x_1 - x_0) = c(b - a).$$

SATZ 2.10.3. Seien  $\phi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

(i)  $\phi + \psi \in \mathcal{T}[a, b]$  und

$$\int_a^b (\phi + \psi)(x) dx = \int_a^b \phi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx.$$

(ii)  $\lambda\phi \in \mathcal{T}[a, b]$  und

$$\int_a^b (\lambda\phi)(x) dx = \lambda \int_a^b \phi(x) dx.$$

(iii)  $\phi \leq \psi \Rightarrow \int_a^b \phi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx,$

wobei

$$\phi \leq \psi :\Leftrightarrow \forall x \in [a, b] (\phi(x) \leq \psi(x)).$$

BEWEIS. Aufgabe □

DEFINITION 2.10.4. Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige beschränkte Funktion d.h. es gibt  $m, M \in \mathbb{R}$  mit

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b].$$

Sei  $\phi_m \in \mathcal{T}[a, b]$  die konstante Funktion  $m$  auf  $[a, b]$  und sei  $\phi_M \in \mathcal{T}[a, b]$  die konstante Funktion  $M$  auf  $[a, b]$ . Es gilt

$$\phi_m \leq f \leq \phi_M.$$

Seien die Menge

$$A(f) = \left\{ \int_a^b \phi(x) dx \mid \phi \in \mathcal{T}[a, b] \ \& \ \phi \geq f \right\},$$

$$B(f) = \left\{ \int_a^b \phi(x) dx \mid \phi \in \mathcal{T}[a, b] \ \& \ \phi \leq f \right\}.$$

$A(f)$  ist eine nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{R}$ ; da  $\phi_M \in \mathcal{T}[a, b]$  und  $\phi_M \geq f$ ,

$$M(b-a) = \int_a^b \phi_M(x) dx \in A(f).$$

$A(f)$  ist eine nach unten beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ ; für alle  $\int_a^b \phi(x) dx \in A(f)$  gilt

$$\phi \geq f \geq \phi_m \Rightarrow \int_a^b \phi(x) dx \geq \int_a^b \phi_m(x) dx = m(b-a).$$

$B(f)$  ist eine nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ ; für alle  $\int_a^b \phi(x) dx \in B(f)$  gilt

$$\phi \leq f \leq \phi_M \Rightarrow \int_a^b \phi(x) dx \leq \int_a^b \phi_M(x) dx = M(b-a).$$

### 2.11. Das Oberintegral und das Unterintegral

DEFINITION 2.11.1 (Supremum, Infimum). Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Zahl  $s \in \mathbb{R}$  heißt *Supremum* (bzw. *Infimum*) von  $A$ , falls  $s$  kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke von  $A$  ist. Dabei heißt  $s$  *kleinste obere Schranke* von  $A$ , falls gilt:

- (i)  $s$  ist eine obere Schranke von  $A$  ( $a \in A \Rightarrow a \leq s$ ).
- (ii) Ist  $s'$  eine weitere obere Schranke von  $A$ , so folgt  $s \leq s'$ .

Dabei heißt  $t$  *größte untere Schranke* von  $A$ , falls gilt:

- (i)  $t$  ist eine untere Schranke von  $A$  ( $a \in A \Rightarrow a \geq t$ ).
- (ii) Ist  $t'$  eine weitere untere Schranke von  $A$ , so folgt  $t' \leq t$ .

Es ist klar, dass die kleinste obere Schranke (bzw. größte untere Schranke) im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist. Man bezeichnet sie mit

$$\sup(A) \text{ [bzw. } \inf(A)].$$

Zum Beispiel

$$\sup(0, 1) = 1 \quad \& \quad \inf(0, 1) = 0.$$

THEOREM 2.11.2. Jede nichtleere, nach oben (bzw. unten) beschränkte Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}$  besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

BEWEIS. Mithilfe des Vollständigkeitsaxioms (siehe [1], S. 89). □

DEFINITION 2.11.3 (Oberintegral, Unterintegral). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige beschränkte Funktion. Dann setzt man

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf A(f) = \inf \left\{ \int_a^b \phi(x)dx \mid \phi \in \mathcal{T}[a, b] \ \& \ \phi \geq f \right\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup B(f) = \sup \left\{ \int_a^b \phi(x)dx \mid \phi \in \mathcal{T}[a, b] \ \& \ \phi \leq f \right\}.$$

Für jede Treppenfunktion  $\phi \in \mathcal{T}[a, b]$  gilt (Aufgabe)

$$\overline{\int_a^b} \phi(x)dx = \int_a^b \phi(x)dx = \underline{\int_a^b} \phi(x)dx.$$

Sei die Dirichlet-Funktion  $\text{Dir} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\text{Dir}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & , x \in \mathbb{I} \cap [0, 1], \end{cases}$$

Es gilt  $\int_0^1 \phi_1(x)dx \in A(\text{Dir})$  und  $\int_0^1 \phi(x)dx \in A(\text{Dir}) \Rightarrow \phi \geq \phi_1$ . Es folgt

$$\overline{\int_0^1} \text{Dir}(x)dx = \int_0^1 \phi_1(x)dx = 1(1 - 0) = 1.$$

Es gilt  $\int_0^1 \phi_0(x)dx \in B(\text{Dir})$  und  $\int_0^1 \phi(x)dx \in B(\text{Dir}) \Rightarrow \phi \leq \phi_0$ . Es folgt

$$\underline{\int_0^1} \text{Dir}(x)dx = \int_0^1 \phi_0(x)dx = 0(1 - 0) = 0$$

d.h.

$$\overline{\int_0^1} \text{Dir}(x)dx \neq \underline{\int_0^1} \text{Dir}(x)dx.$$

## 2.12. Das Riemannsches Integral

DEFINITION 2.12.1. Eine beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Riemann-integrierbar*, wenn

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

In diesem Fall setzt man

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Jede Treppenfunktion ist Riemann-integrierbar, aber die Dirichlet-Funktion ist nicht.

SATZ 2.12.2. *Es gelten:*

- (i) *Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist Riemann-integrierbar.*  
(ii) *Jede monotone Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist Riemann-integrierbar.*

BEWEIS. Siehe [1], S. 198. □

SATZ 2.12.3. *Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbare Funktionen und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

- (i) *Die Funktion  $f + g$  ist integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

- (ii) *Die Funktion  $\lambda f$  ist integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

- (iii)  $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$

wobei

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in [a, b] (f(x) \leq g(x)).$$

- (iv) *Die Funktion  $|f|$  ist integrierbar und es gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

- (v) *Die Funktion  $f \cdot g$  ist integrierbar.*

BEWEIS. Siehe [1], S. 199. □

SATZ 2.12.4. *Sei  $a < b < c$  und  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  $f$  ist genau dann integrierbar, wenn sowohl die Beschränkung  $f|_{[a, b]}$  der Funktion  $f$  auf  $[a, b]$  also auch die Beschränkung  $f|_{[b, c]}$  der Funktion  $f$  auf  $[b, c]$  integrierbar sind und es gilt dann*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

BEWEIS. Siehe [1], S. 207. □

DEFINITION 2.12.5. Seien  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Man setzt

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Sei  $f$  Riemann-integrierbar. Man setzt

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

### 2.13. Integration und Differentiation

SATZ 2.13.1. Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $c \in [a, b]$ . Für  $x \in [a, b]$  sei

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Dann ist die Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt  $F' = f$ . Die Funktion  $F$  heißt das unbestimmte Integral von  $f$ .

BEWEIS. Siehe [1], S. 209. □

DEFINITION 2.13.2. Eine differenzierbare Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Stammfunktion* einer Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , falls  $F' = f$ .

Also das unbestimmte Integral eine Stammfunktion des Integranden ist.

SATZ 2.13.3. Sei  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine weitere Funktion  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Stammfunktion von  $f$ , wenn  $F - G$  eine Konstante ist.

BEWEIS. (i) Sei  $F - G = c$ , wobei  $c \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $G' = (F - c)' = F' = f$ .  
(ii) Sei  $G$  Stammfunktion von  $f$ , also  $G' = f = F'$ . Dann gilt  $(F - G)' = 0$ , daher ist  $F - G$  konstant (Corollar 2.9.7). □

THEOREM 2.13.4 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

BEWEIS. Für  $x \in [a, b]$  sei

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Ist  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ , so gibt es nach Satz 2.13.3 ein  $c \in \mathbb{R}$  mit

$$F - G = c.$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + c) - (G(a) + c) \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

□

Man setzt

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Die Formel von Theorem 2.13.4 schreibt sich dann als

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b.$$

BEISPIEL 2.13.5.

$$\int_0^1 1dx = \int_0^1 (\text{id}_{\mathbb{R}})'dx = \text{id}_{\mathbb{R}}(x) \Big|_0^1 = \text{id}_{\mathbb{R}}(1) - \text{id}_{\mathbb{R}}(0) = 1 - 0 = 1.$$

$$\int_0^1 xdx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right)'dx = \left(\frac{1}{2}x^2\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\int_0^1 x^2dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3\right)'dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'dx = \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{n+1}1^{n+1} - \frac{1}{n+1}0^{n+1} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

## 2.14. Die Substitutionsregel und partielle Integration

SATZ 2.14.1 (Substitutionsregel). Sei  $f : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $g : [a, b] \rightarrow [a', b']$  eine stetig differenzierbare Funktion (d.h.  $g'$  eine stetige Funktion ist). Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

BEWEIS. Sei  $F : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$ . Für die Funktion  $F \circ g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt nach der Kettenregel

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Daraus folgt nach Theorem 2.13.4

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(t))g'(t)dt &= (F \circ g)(t) \Big|_a^b \\ &= (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx. \quad \square \end{aligned}$$

BEISPIEL 2.14.2. Seien  $f(x) = \frac{1}{x}$ , wobei  $x \neq 0$ , und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion in  $[a, b]$  mit  $g(t) \neq 0$ , für jedes  $t \in [a, b]$ , und sei  $g'$  stetig in  $[a, b]$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{g'(t)}{g(t)} dt &= \int_a^b f(g(t))g'(t)dt \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{x} dx \\ &= \ln(|x|) \Big|_{g(a)}^{g(b)} \\ &= \ln(|g(b)|) - \ln(|g(a)|). \end{aligned}$$

BEISPIEL 2.14.3. Für  $c \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_a^b f(t+c)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx.$$

Sei  $g(t) = t + c$ . Es gilt  $g'(t) = 1$  und

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t+c)dt &= \int_a^b f(g(t))g'(t)dt \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx \\ &= \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx. \end{aligned}$$

BEISPIEL 2.14.4. Für  $c \neq 0$  gilt

$$\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x)dx.$$

Sei  $g(t) = ct$ . Es gilt  $g'(t) = c$  und

$$\begin{aligned} \int_a^b f(ct)dt &= \frac{1}{c} \int_a^b f(g(t))g'(t)dt \\ &= \frac{1}{c} \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx \\ &= \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x)dx. \end{aligned}$$

SATZ 2.14.5 (Partielle Integration). Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetig differenzierbare Funktionen. Es gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

BEWEIS. Für  $F = f \cdot g$  gilt

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Leftrightarrow f(x)g'(x) = F'(x) - f'(x)g(x),$$

für jedes  $x \in [a, b]$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g'(x)dx &= \int_a^b [F'(x) - f'(x)g(x)]dx \\ &= \int_a^b F'(x)dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx \\ &= F(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx \end{aligned}$$

$$= f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx. \quad \square$$

BEISPIEL 2.14.6. Seien  $a, b > 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b \ln(x)dx &= \int_a^b \ln(x)x'dx \\ &= x \ln(x) \Big|_a^b - \int_a^b \ln'(x)x dx \\ &= x \ln(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{x} x dx \\ &= x \ln(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx \\ &= x \ln(x) \Big|_a^b - x \Big|_a^b \\ &= [x \ln(x) - x] \Big|_a^b \\ &= [x(\ln(x) - 1)] \Big|_a^b. \end{aligned}$$

BEISPIEL 2.14.7. Sei das Integral

$$I = \int e^x \cos(x)dx.$$

Es gelten

$$\begin{aligned} I &= \int (e^x)' \cos(x)dx \\ &= e^x \cos(x) - \int e^x [-\sin(x)]dx \\ &= e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)dx \\ &= e^x \cos(x) + J, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} J &= \int e^x \sin(x)dx \\ &= \int (e^x)' \sin(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx \\ &= e^x \sin(x) - I. \end{aligned}$$

Also gilt

$$I = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - I \Leftrightarrow I = \frac{e^x}{2} [\cos(x) + \sin(x)].$$

## KAPITEL 3

# Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Die Wahrscheinlichkeitstheorie und die Statistik sind Disziplinen der Mathematik, die der Untersuchung von Gesetzmäßigkeiten, die durch den “Zufall” beeinflußt werden, gewidmet sind.

### 3.1. Wahrscheinlichkeitsräume

Die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen. Zum Beispiel wie wahrscheinlich ist es beim fünffinaligen Würfeln mehr als dreimal eine Sechs zu würfeln?

Um Wahrscheinlichkeiten berechnen zu können, muss das Zufallsexperiment auf geeignete Weise *modelliert* werden. Die möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments werden *Elementarereignisse* genannt. Wir bezeichnen die Menge der Elementarereignisse eines solchen Experiments stets mit dem Buchstaben  $\Omega$ .

BEISPIEL 3.1.1. Augenzahl beim einmaligen Werfen eines Würfels:

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

BEISPIEL 3.1.2. Augenzahlen beim zweimaligen Werfen eines Würfels:

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ &= \Omega_1 \times \Omega_1 \\ &= \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i \in \Omega_1 \ \& \ j \in \Omega_1\}.\end{aligned}$$

Für die Kardinalität  $|\Omega_2|$  von  $\Omega_2$  gilt

$$|\Omega_2| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_1| = 6 \cdot 6 = 36.$$

BEISPIEL 3.1.3. Gewicht einer zufällig gewählten Person in Kilogramm:

$$\Omega_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1000\}.$$

Dasselbe Zufallsexperiment kann also auf unterschiedliche Weise modelliert werden. Z.b. für das Gewicht einer zufällig gewählten Person in Kilogramm können wir die folgenden Mengen nutzen

$$\Omega_3' = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1000\},$$

$$\Omega_3'' = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 750\}.$$

DEFINITION 3.1.4. Sei  $\Omega$  die Menge der Elementarereignisse eines Zufallsexperiments und  $\mathcal{P}(\Omega)$  die Potenzmenge von  $\Omega$ , also die Menge der Teilmengen von  $\Omega$ . Eine *Ereignismenge* auf  $\Omega$  ist eine Menge  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  mit folgenden Eigenschaften:

(E<sub>1</sub>)  $\emptyset \in \mathcal{A}$  und  $\Omega \in \mathcal{A}$ .

(E<sub>2</sub>) Für jedes  $A \in \mathcal{A}$  liegt auch  $\Omega - A \in \mathcal{A}$ , wobei

$$\Omega - A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}.$$

(E<sub>3</sub>) Für jede Familie  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  in  $\mathcal{A}$  d.h.

$$A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A}, A_3 \in \mathcal{A}, \dots,$$

es gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A},$$

wobei

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N}^+ (\omega \in A_n)\}.$$

Die Elemente von  $\mathcal{A}$  werden *Ereignisse* des Zufallsexperiments genannt.

Ist  $\Omega$  eine endliche Menge, dann betrachtet man häufig die Ereignismenge

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega).$$

Ist  $\Omega = [a, b]$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ , dann betrachtet man die *kleinste Ereignismenge*

$$\mathcal{A}_{a,b}$$

die alle Teilintervalle von  $\Omega$  enthält, z.B.  $(a, \frac{a+b}{2})$  und  $(\frac{a+b}{2}, b)$ .

BEISPIEL 3.1.5. Beim einmaligen Werfen eines Würfels wird der Wert 6 erzielt:

$$A_1 = \{6\} \in \mathcal{P}(\Omega_1) = \mathcal{A}_1.$$

BEISPIEL 3.1.6. Beim zweimaligen Werfen eines Würfels beträgt die Augensumme mindestens 11:

$$A_2 = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\} \in \mathcal{P}(\Omega_2) = \mathcal{A}_2.$$

BEISPIEL 3.1.7. Das Gewicht einer zufällig gewählten Person liegt zwischen 60 und 80 kg in  $\Omega_3$ :

$$A_3 = (60, 80) \in \mathcal{A}_{0,1000}.$$

SATZ 3.1.8. Sei  $\mathcal{A}$  eine Ereignismenge auf  $\Omega$  und  $A, B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ . Es gelten:

- (i)  $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$ .
- (ii)  $A \cup B \in \mathcal{A}$ .
- (iii)  $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}$ .
- (iv)  $A \cap B \in \mathcal{A}$ .
- (v)  $A - B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \ \& \ \omega \notin B\} \in \mathcal{A}$ .

BEWEIS. (i) Sei die Familie

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots$$

Nach der Eigenschaft ( $E_3$ ) es gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}.$$

- (ii) Es folgt aus (i).
- (iii) Es gilt

$$\begin{aligned} A_1 \cap \dots \cap A_n &= \bigcap_{k=1}^n A_k \\ &= \Omega - \left[ \bigcup_{k=1}^n (\Omega - A_k) \right] \\ &= \Omega - [(\Omega - A_1) \cup \dots \cup (\Omega - A_n)]. \end{aligned}$$

Nach der Eigenschaft ( $E_2$ ) es folgt  $(\Omega - A_1), \dots, (\Omega - A_n) \in \mathcal{A}$ , und aus (i) es folgt  $(\Omega - A_1) \cup \dots \cup (\Omega - A_n) \in \mathcal{A}$ . Nach der Eigenschaft ( $E_2$ ) es folgt  $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}$ .

- (iv) Es folgt aus (iii).
- (v) Da  $A - B = A \cap (\Omega - B)$ , es folgt aus (iv).

Schließlich muss zur Modellierung eines Zufallsexperiments jedem Ereignis noch eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.

DEFINITION 3.1.9. Sei  $\Omega$  die Menge der Elementarereignisse eines Zufallsexperiments und  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  eine Ereignismenge. Eine Abbildung  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  wird *Wahrscheinlichkeitsverteilung* genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

( $P_1$ ) Für alle  $A \in \mathcal{A}$  gilt  $P(A) \geq 0$ .

( $P_2$ ) Ist  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  eine Familie in  $\mathcal{A}$  mit

$$A_m \cap A_n = \emptyset, \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}^+ \text{ mit } n \neq m,$$

dann gilt

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

( $P_3$ ) Es gilt  $P(\Omega) = 1$ .

Das Tupel  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  wird dann ein *Wahrscheinlichkeitsraum* genannt.

Die Zahl  $P(A)$  gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass das Ereignis  $A \in \mathcal{A}$  bei einer Ausführung des Zufallsexperiments eintritt.

$P(A) = 0$  : Das Ereignis  $A$  tritt niemals ein.

$P(A) = 1$  : Das Ereignis  $A$  tritt sicher ein.

$$P(A) = \frac{1}{2} : \text{“fifty-fifty”}$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass  $A$  eintritt ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass  $A$  nicht eintritt.

SATZ 3.1.10. Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A, B \in \mathcal{A}$ . Es gelten:

(i)  $P(\emptyset) = 0$ .

(ii)  $P(\Omega - A) = 1 - P(A)$ .

(iii) Wenn  $A \cap B = \emptyset$ , dann gilt  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

(iv) Wenn  $A \subseteq B$ , dann gilt  $P(A) \leq P(B)$ .

(v) Wenn  $A \subseteq B$ , dann gilt  $P(B - A) = P(B) - P(A)$ .

(vi)  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ .

BEWEIS. (i) Sei die Familie  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  in  $\mathcal{A}$  definiert durch

$$A_n = \begin{cases} \Omega & , n = 1 \\ \emptyset & , n > 1. \end{cases}$$

Nach der Eigenschaft  $(P_2)$  es folgt

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = P(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset),$$

also gilt

$$0 = \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset).$$

Es gilt  $P(\emptyset) \geq 0$ . Angenommen  $P(\emptyset) > 0$ . Dann gilt  $\sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset) > 0$ . Also gilt  $P(\emptyset) = 0$ .

(ii) Sei die Familie  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  in  $\mathcal{A}$  definiert durch

$$B_n = \begin{cases} A & , n = 1 \\ \Omega - A & , n = 2 \\ \emptyset & , n > 2. \end{cases}$$

Nach der Eigenschaft  $(P_2)$  es folgt

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) \\ &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= P(A) + P(\Omega - A) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset) \\ &= P(A) + P(\Omega - A). \end{aligned}$$

(iii) Sei die Familie  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  in  $\mathcal{A}$  definiert durch

$$C_n = \begin{cases} A & , n = 1 \\ B & , n = 2 \\ \emptyset & , n > 2. \end{cases}$$

Nach der Eigenschaft  $(P_2)$  es folgt

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(A) + P(B) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset) \\
&= P(A) + P(B).
\end{aligned}$$

(iv)-(vi) Aufgabe. □

BEISPIEL 3.1.11. (Wurf einer fairen Münze). Bei einem Wurf einer *fairen* Münze kann sich *Kopf* oder *Zahl* ergeben, wobei diese beiden Möglichkeiten die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Zur mathematischen Modellierung dieses Vorgangs kann Kopf mit der Zahl 0 und Zahl mit 1 identifiziert werden und dann

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{0, 1\}, \\
\mathcal{A} &= \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1\}\}, \\
P(\emptyset) &= 0, \quad P(\Omega) = 1, \quad P(\{0\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

gewählt werden. Die Menge  $\Omega$  faßt die möglichen Ausgänge des Münzwurfs zusammen. Mit diesen Ausgängen sind die durch  $\mathcal{A}$  beschriebenen Ereignisse

$\emptyset$  : Es wird weder Kopf noch Zahl geworfen,

$\{0\}$  : Es wird Kopf geworfen,

$\{1\}$  : Es wird Zahl geworfen,

$\Omega$  : Es wird Kopf oder Zahl geworfen

verbunden. Da die Münze als fair vorausgesetzt wurde, besitzen diese Ereignisse "offensichtlich" die durch  $P$  angegebenen Wahrscheinlichkeiten.

Eine sehr oft geworfene faire Münze zeigt in etwa der Hälfte aller Fälle Kopf. Diese Gesetzmäßigkeit wird im sogenannten *Gesetz der großen Zahlen*, einem zentralen Resultat der Wahrscheinlichkeitstheorie, mathematisch gefaßt (Siehe [5], Kapitel 7).

BEISPIEL 3.1.12. (Wurf einer unfairen Münze). Bei einem Wurf einer Münze, die bevorzugt auf eine der beiden Seiten fällt, d.h. einer unfairen Münze, können  $\Omega$  und  $\mathcal{A}$  wie in Beispiel 1 gewählt werden. Mit einem geeigneten  $p \in [0, 1]$  ist dann allerdings  $P$  gemäß

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1, \quad P(\{0\}) = p, \quad P(\{1\}) = 1 - p$$

zu modifizieren.

BEISPIEL 3.1.13. (Wurf einer fairen Würfels). Anders als in den Beispielen 3.1.11 und 3.1.12 sind in diesem Fall sechs Ausgänge möglich, wobei diese wie in Beispiel 3.1.11 gleichwahrscheinlich sind. Nun kann durch

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1), \text{ wobei } |\mathcal{P}(\Omega_1)| = 2^6,$$

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6},$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k \in A} \{k\}\right) = \sum_{k \in A} P(\{k\}) = \frac{|A|}{6}, \quad A \in \mathcal{P}(\Omega_1)$$

ein zur Modellierung geeigneter Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P)$  definiert werden. Das Ereignis "Es wird mindestens eine 3 gewürfelt" ist dann gegeben durch  $A = \{3, 4, 5, 6\}$ . Es gilt

$$P(A) = P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

BEISPIEL 3.1.14. (Zweimaliger, unabhängiger Wurf einer fairen Würfels). Wir nutzen die folgende Modellierung:

$$\Omega_2 = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i, j \leq 6\}, \quad |\Omega_2| = 36$$

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2), \quad |\mathcal{A}_2| = 2^{36},$$

$$P(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36}, \quad \text{für alle } (i, j) \in \Omega_2,$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{(i,j) \in A} \{(i, j)\}\right) = \sum_{(i,j) \in A} P(\{(i, j)\}) = \frac{|A|}{36}, \quad A \in \mathcal{P}(\Omega_2).$$

DEFINITION 3.1.15. Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $P(A) > 0$ . Dann nennt man

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

die *bedingte* Wahrscheinlichkeit von  $B$  unter Bedingung  $A$ .

Die Zahl  $P(B|A)$  gibt an, wie wahrscheinlich das Ereignis  $B$  ist, wenn wir voraussetzen, dass das Ereignis  $A$  eintritt. Sei  $P(A) > 0$ . Es gilt

$$P(A|A) = 1,$$

$$P((\Omega - A)|A) = P(A|(\Omega - A)) = 0,$$

$$P(A|\Omega) = P(A).$$

BEISPIEL 3.1.16. Eine Computerfirma bezieht 1000 Speicherchips von einer Herstellerfirma  $H_1$  und 4000 Speicherchips von einer weiteren Herstellerfirma  $H_2$ . Von der Firma  $H_1$  sind 100, von der Firma  $H_2$  sind 200 Chips defekt.

*Frage 1:* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Chip von Firma  $H_1$  defekt ist?

*Frage 2:* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Chip von Firma  $H_2$  stammt, wenn der Chip defekt ist?

*Modellierung:* Wir setzen  $\Omega = \{1, 2, \dots, 5000\}$ ,  $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ , und definieren  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$P(\{i\}) = \frac{1}{5000},$$

für alle  $i \in \Omega$ , und

$$P(D) = \frac{|D|}{5000},$$

für alle  $D \subseteq \Omega$ . Seien die Ereignisse

$A$  : Der zufällig gewählter Chip stammt von Firma  $H_1$ ,

$B$  : Der zufällig gewählter Chip stammt von Firma  $H_2$ ,

$C$  : Der zufällig gewählter Chip ist defekt.

Für die Beantwortung von Frage 1 muss die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(C|A)$  ausgerechnet werden. Es gilt

$$P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{|A \cap C|}{5000}}{\frac{1000}{5000}} = \frac{\frac{100}{5000}}{\frac{1000}{5000}} = \frac{100}{1000} = 0,1.$$

Für die Beantwortung von Frage 2 muss die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(B|C)$  ausgerechnet werden. Es gilt

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{|B \cap C|}{5000}}{\frac{300}{5000}} = \frac{\frac{200}{5000}}{\frac{300}{5000}} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}.$$

DEFINITION 3.1.17. Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse  $A, B \in \mathcal{A}$  heißen *stochastisch unabhängig*, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt.

BEISPIEL 3.1.18. Beim Roulette wird 5-mal die Kugel geworfen. Ist die Wahrscheinlichkeit für die Farbe “schwarz” im fünften Wurf höher als normal, wenn in den ersten vier Würfeln “rot” gefallen ist? Mit anderen Worten, sind die Ereignisse

$A$  : In den ersten vier Würfeln fällt rot,

$B$  : Im fünften Wurf fällt schwarz

abhängig oder unabhängig voneinander?

*Modellierung:* Zur mathematischen Modellierung dieses Vorgangs kann rot mit der Zahl 0 und schwarz mit 1 identifiziert werden. Wir setzen

$$\Omega_0 = \{0, 1\} \quad \Omega = \Omega_0^5 = \Omega_0 \times \Omega_0 \times \Omega_0 \times \Omega_0 \times \Omega_0,$$

und  $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ . Wir definieren  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$P(\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\}) = \frac{1}{2^5},$$

für alle  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Omega$ , und

$$P(D) = \frac{|D|}{2^5},$$

für alle  $D \subseteq \Omega$ . Es gilt

$$A = \{(0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)\},$$

$$B = \Omega_0^4 \times \{1\},$$

$$A \cap B = \{(0, 0, 0, 0, 0, 1)\},$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2^5},$$

$$P(A)P(B) = \frac{2}{2^5} \frac{2^4}{2^5} = \frac{1}{2^5} = P(A \cap B).$$

SATZ 3.1.19. Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien  $A, B$  zwei Ereignisse mit  $P(A) > 0$  und  $P(B) > 0$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Die Ereignisse  $A, B$  sind stochastisch unabhängig.
- (ii) Es gilt  $P(A|B) = P(A)$ .
- (iii) Es gilt  $P(B|A) = P(B)$ .

BEWEIS. (i)  $\Rightarrow$  (ii): Es gilt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Es gilt

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \left[ \left( \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \right) P(B) \right] \frac{1}{P(A)} \\ &= P(A|B)P(B) \frac{1}{P(A)} \\ &= P(A)P(B) \frac{1}{P(A)} \\ &= P(B). \end{aligned}$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Es gilt

$$P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad \square$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $A$  wird also durch die Annahme, dass  $B$  eintritt (oder nicht eintritt) nicht beeinflusst.

### 3.2. Zufallsvariablen

SATZ 3.2.1. Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\Omega \ni \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$$

wird Zufallsvariable genannt. Sei

$$\mathcal{A}_X = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\},$$

wobei

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$$

das Urbild von  $B$  unter  $X$  ist. Sei die Funktion

$$P_X : \mathcal{A}_X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{A}_X \ni B \mapsto P_X(B) = P(X^{-1}(B)).$$

Man nennt die Funktion  $P_X$  die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$ . Das Tupel  $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_X, P_X)$  ist ein Wahrscheinlichkeitsraum.

BEWEIS.  $\mathcal{A}_X$  ist eine Ereignismenge auf  $\mathbb{R}$ :

$$\mathbb{R} \in \mathcal{A}_X \Leftrightarrow X^{-1}(\mathbb{R}) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \Omega \in \mathcal{A},$$

$$\emptyset \in \mathcal{A}_X \Leftrightarrow X^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \emptyset \in \mathcal{A},$$

$$B \in \mathcal{A}_X \Leftrightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

$$\mathbb{R} - B \in \mathcal{A}_X \Leftrightarrow X^{-1}(\mathbb{R} - B) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \Omega - X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Also gilt  $B \in \mathcal{A}_X \Rightarrow \mathbb{R} - B \in \mathcal{A}_X$ . Es gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}_X \Leftrightarrow X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}.$$

Also gilt

$$\forall_{n \geq 1} (B_n \in \mathcal{A}_X) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}_X.$$

$P_X$  ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung: Es gilt

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \geq 0.$$

Sei  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  eine Familie in  $\mathcal{A}_X$  mit

$$B_m \cap B_n = \emptyset, \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}^+ \text{ mit } n \neq m.$$

Dann gilt

$$X^{-1}(B_m) \cap X^{-1}(B_n) = X^{-1}(B_m \cap B_n) = \emptyset, \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \neq m.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} P_X\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) \\ &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_X(B_n). \end{aligned}$$

Es gilt

$$P_X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1. \quad \square$$

In der Regel enthält  $\mathcal{A}_X$  zumindest alle Intervalle  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Dann gibt  $P_X(I)$  die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass  $X(\omega)$  für ein Elementarereignis  $\omega \in \Omega$  im Bereich  $I$  liegt. Beispielsweise ist  $P_X((2, 3))$  die Wahrscheinlichkeit für  $2 < X(\omega) < 3$ .

BEISPIEL 3.2.2.  $X(\omega) = \omega$  : Augenzahl beim einmaligen Werfen eines Würfels:

$P_X([1, 6]) = 1$ , Zahl zwischen 1 und 6 wird immer gewürfelt,

$P_X(\{7\}) = 0$ , unmöglich, eine 7 zu würfeln,

$P_X(\{1\}) = \frac{1}{6}$ , Wahrscheinlichkeit für eine 1,

$P_X([1, 2]) = \frac{1}{3}$ , Wahrscheinlichkeit für eine 1 oder 2,

$P_X((1, 6)) = \frac{2}{3}$ , Wahrscheinlichkeit für eine 2, 3, 4 oder 5.

An Stelle von  $P_X(\{a\})$  schreibt man auch

$$P(X = a)$$

für einen einzelnen Wert  $a \in \mathbb{R}$ .

DEFINITION 3.2.3. Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und  $P_X$  die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Abbildung

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a \mapsto F_X(a),$$

$$F_X(a) = P(\{X \leq a\}) = P_X(-\infty, a] = P(X^{-1}(-\infty, a])$$

wird Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen genannt. Nimmt  $F_X$  nur endlich viele verschiedene Wert an, dann nennt man  $X$  eine diskrete Zufallsvariable. Ist  $F_X$  eine stetige Funktion, dann nennt man die Zufallsvariable  $X$  kontinuierlich.

BEISPIEL 3.2.4. Für das einmalige Werfen des Würfels erhalten wir die folgende Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & , a < 1 \\ \frac{1}{6} & , 1 \leq a < 2, \\ \frac{1}{3} & , 2 \leq a < 3, \\ \frac{1}{2} & , 3 \leq a < 4, \\ \frac{2}{3} & , 4 \leq a < 5, \\ \frac{5}{6} & , 5 \leq a < 6, \\ 1 & , a \geq 6. \end{cases}$$

DEFINITION 3.2.5. Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann ist der Erwartungswert  $E(X)$  von  $X$  definiert durch

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n P(X = x_n),$$

wobei  $x_1, x_2, x_3, \dots$  die einzigen Werte sind, die  $X$  annehmen kann. Den Wert

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = E((X - E(X))^2)$$

nennt man die Varianz und

$$\sigma_X = \sqrt{E((X - E(X))^2)}$$

die Standardabweichung der Zufallsvariablen.

BEISPIEL 3.2.6. (Einmaliges Werfen eines Würfels) Es gilt

$$E(X) = \sum_{k=1}^6 kP(X = k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k = \frac{1}{6} \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{42}{12} = 3,5.$$

Sei die Variable

$$Y(\omega) = (X(\omega) - E(X))^2 = (\omega - E(X))^2 = (\omega - 3,5)^2,$$

für alle  $\omega \in \{1, \dots, 6\}$ . Die Variable  $Y$  hat für  $X(\omega) \in \{3, 4\}$  den Wert  $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ , für  $X(\omega) \in \{2, 5\}$  den Wert  $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ , und für  $X(\omega) \in \{1, 6\}$  den Wert  $(\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$ .

Die Varianz hat also den Wert

$$\text{Var}(X) = E(Y) = \frac{1}{3} \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \frac{9}{4} + \frac{1}{3} \frac{25}{4} = \frac{1}{3} \frac{35}{4} = \frac{35}{12},$$

und die Standardabweichung beträgt

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{35}{12}}.$$

## Literaturverzeichnis

- [1] O. Forster: *Analysis I*, Springer, 2016.
- [2] C. H. Hesse: *Wahrscheinlichkeitstheorie: Eine Einführung mit Beispielen und Anwendungen* Vieweg+Teubner, 2009.
- [3] S. Lang: *Undergraduate Analysis*, Springer, 1983.
- [4] S. Lang: *A First Course in Calculus*, Springer, 1986.
- [5] K. Oelschläger: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und die Statistik, Skriptum, 2016.
- [6] H. Schwichtenberg: *Constructive analysis with witnesses*, Lecture notes, LMU, 2019.